Fakulta
tělesné kultury

ŠKOLA DIAGNOSTIKY

Biomechanika: fyzikální základ

Miroslav Janura
Eva Janurová

Olomouc 2023

OBSAH

1 ZÁKLADNÍ POJMY ... 3
1.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky ... 3
1.1.1 Soustavy fyzikálních veličin a jednotek ... 3
1.1.2 Mezinárodní soustava jednotek ... 3
1.2 Rozdělení fyzikálních veličin ... 5
1.2.1 Základní operace s vektory ... 6
1.2.2 Soustavy souřadnic ... 10
1.3 Testové otázky ... 12
2 KINEMATIKA ... 13
2.1 Dělení pohybů ... 13
2.2 Popis pohybu pomocí vektorů ... 14
2.3 Rychlost ... 14
2.4 Zrychlení ... 15
2.5 Funkční popis pohybu ... 16
2.6 Rovnoměrný přímočarý pohyb ... 17
2.7 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb ... 18
2.8 Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb ... 19
2.9 Volný pád ... 19
2.10 Nerovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb ... 20
2.11 Složené pohyby ... 20
2.11.1 Vrh svislý vzhůru ... 20
2.11.2 Vrh vodorovný ... 22
2.11.3 Vrh šikmý ... 24
2.12 Pohyb po kružnici ... 27
2.12.1 Obvodové veličiny ... 28
2.12.2 Úhlové veličiny ... 29
2.13 Testové otázky ... 32
3 DYNAMIKA ... 35
3.1 Newtonovy pohybové zákony ... 35
3.1.1 Zákon setrvačnosti ... 35
3.1.2 Zákon síly ... 36
3.1.3 Zákon akce a reakce ... 36
3.2 Druhy sil ... 37
3.2.1 Síly při pohybu po kružnici ... 37
3.2.2 Síla tíhová ... 38
3.2.3 Síly třecí ... 39
3.2.4 Síly odporové ... 41
3.2.5 Síly při pohybu po nakloněné rovině ... 42
3.2.6 Síly setrvačné ... 43
3.2.7 Síly pružnosti ... 44
3.3 Časový účinek síly ... 45
3.3.1 Impuls síly, hybnost hmoty ... 45
3.4 Dráhový účinek síly ... 46
3.4.1 Mechanická práce ... 46
3.4.2 Výkon ... 48

3.4.3 Mechanická energie ... 48
3.4.4 Kinetická energie ... 49
3.4.5 Potenciální energie ... 49
3.5 Tuhé těleso ... 51
3.5.1 Těžiště, hmotný střed ... 51
3.5.2 Moment setrvačnosti ... 51
3.5.3 Gyrační poloměr ... 53
3.5.4 Steinerova věta ... 53
3.5.5 Moment síly ... 54
3.5.6 Moment hybnosti ... 55
3.5.7 Pohybová rovnice rotačního pohybu ... 55
3.5.8 Práce momentu síly ... 56
3.5.9 Výkon momentu síly ... 56
3.5.10 Kinetická energie rotačního pohybu ... 56
3.5.11 Porovnání vztahů popisující translační a rotační pohyb ... 57
3.6 Testové otázky ... 58

Tento text vznikl na základě úpravy a aktualizace výstupů publikovaných na dané téma v předcházejícím období.

1 ZÁKLADNÍ POJMY

1.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky

Při hodnocení daného objektu (tělesa, lidského těla) a jeho pohybu ze zkušenosti víme, že tento objekt zaujímá určitý prostor, pohybuje se určitou rychlostí, určitým směrem apod. Vlastnosti, stavy a procesy v tomto tělese můžeme srovnávat s vlastnostmi, stavy a procesy u jiných těles. Přitom je nutné vzít v úvahu, že tato tělesa na sebe mohou navzájem působit – působení horní končetiny na míč (hod míčem), působení dolní končetiny na podložku (odraz při chůzi), působení nohy na plynový pedál (zvýšení rychlosti pohybu automobilu) apod.

Fyzikální vlastnosti, stavy i jejich změny, které je možné změřit (kvantifikovat), charakterizujeme fyzikálními veličinami. Fyzikální veličina je tedy kvantitativně (hodnotu lze změřit nebo spočítat) vyjádřený fyzikální pojem.

1.1.1 Soustavy fyzikálních veličin a jednotek

Každá fyzikální veličina souvisí s mnoha jinými fyzikálními veličinami a jejich změnami. Kdyby každá fyzikální veličina a její jednotka byly určovány navzájem zcela nezávisle, vedlo by to k velkým praktickým obtížím. Proto už od počátku 19. století vznikaly soustavy veličin a jednotek. Při tvorbě těchto soustav byl na začátku určitý počet veličin označen za základní a k nim se stanovily základní jednotky.

V České republice by se podle Vyhlášky č. 264/2000 Sb. (Vyhláška Ministerstva průmyslu a obchodu o základních měřicích jednotkách a ostatních jednotkách a o jejich označování) měly používat pouze zákonné měřicí jednotky, které vycházejí z Mezinárodní soustavy jednotek označované SI (zkratka francouzského názvu Système International d`Unités).

1.1.2 Mezinárodní soustava jednotek

Mezinárodní soustavu jednotek SI tvoří:

a) Sedm základních jednotek, které odpovídají sedmi základním veličinám.

Základní veličina	*Značka veličiny*	*Základní jednotka*	*Značka jednotky*
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	kandela	cd

Každá základní jednotka má svou definici, uvedenou v české státní normě ČSN ISO 80000-1 (011300).

b) Dvě doplňkové jednotky

Doplňková veličina	*Značka veličiny*	*Doplňková jednotka*	*Značka jednotky*
rovinný úhel	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	radián	rad
prostorový úhel	$\Phi, \Theta, \Omega, \ldots$	steradián	sr

c) Odvozené jednotky SI, které jsou určeny pro měření všech ostatních fyzikálních veličin (odvozených veličin). Odvozené jednotky jsou odvozovány pomocí definičních vztahů ze základních nebo již dříve odvozených jednotek. Vycházíme při tom z definičních vztahů odpovídajících veličin.

Například hustota ρ je určena vztahem: $\rho = \frac{m}{V}$. Jednotka hustoty: $[\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

Některé jednotky mají vlastní názvy a značky, zpravidla podle jmen vynikajících fyziků, např. newton – N, ampér – A, volt – V, pascal – Pa aj.

Poznámka: Některé ze značek jsou často odvozovány od anglických, řeckých nebo latinských termínů pro odpovídající veličiny a jednotky. Např. délka l (z angl. length = délka), objem V (z angl. volume = objem). Slovo metr je odvozeno z řeckého metron = měřidlo, měřítko, míra.
Slovo sekunda pochází z latinského secundus = druhý; „Secundus minuta hora“ = „druhá zmenšená hodina“, tj. druhé zmenšení hodiny. „Prvním zmenšením“ bylo pouhé „minuta hora“. Doslovným českým překladem „sekundy“ je „vteřina“ od staročeského „vterý“ = druhý (viz úterý, tj. druhý den v týdnu).

Př. Vyjádřete jednotku zrychlení $\vec{a}$ v základních jednotkách SI.
Řešení:

Z definice $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ($\Delta \rightarrow$ delta představuje změnu, $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \Delta t = t_2 - t_1$)

$$[a] = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

Př. Určete fyzikální rozměr newtonu (vyjádřete v základních jednotkách SI).
Řešení: $[F] = \mathrm{N}$

Síla je určena z definičního vztahu $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

$[F] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

---

d) Násobky a díly jednotek SI, jejichž názvy se tvoří pomocí normalizovaných předpon z názvů základních jednotek. V tabulce jsou uvedeny nejužívanější předpony spolu s mocninami deseti, pomocí nichž se násobky nebo díly vyjadřují.

Předpona	*Značka*	*Násobek*	*Mocnina deseti*
tera-	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga-	G	1 000 000 000	10^{9}
mega-	M	1 000 000	10^{6}
kilo-	k	1 000	10^{3}
mili-	m	0,001	10^{-3}
mikro-	µ	0,000 001	10^{-6}
nano-	n	0,000 000 001	10^{-9}
piko-	p	0,000 000 000 001	10^{-12}

V některých případech se používají i další předpony, např. centi (značka c): 1 cm = 10^{-2} m.

Abychom nemuseli odvozené jednotky zapisovat pomocí zlomkové čáry, používáme záporné exponenty u značek jednotek, např.

$\frac{kg}{m^3} = kg \cdot m^{-3}$, $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$, $\frac{N}{kg} = N \cdot kg^{-1}$

1.2 Rozdělení fyzikálních veličin

Fyzikální veličiny dělíme podle jejich typu na:

a) Skaláry (skalární fyzikální veličiny) jsou určeny pouze svou velikostí (číselnou hodnotou) a jednotkou, ve které se daná veličina měří. Mezi skaláry patří hmotnost m, čas t, práce W, výkon P, energie E, moment setrvačnosti J apod. Při práci se skaláry využíváme pravidla pro počítání s reálnými čísly.

Př. Přepravní služba převáží zásilky o hmotnosti $m_1 = 27$ kg, $m_2 = 35$ kg, $m_3 = 23$ kg. Celková hmotnost nákladu je $m = m_1 + m_2 + m_3 = 27\text{ kg} + 35\text{ kg} + 23\text{ kg} = 85\text{ kg}$.
Při vykládání zásilek bychom postupovali tak, že bychom hmotnosti zásilek odečítali.

b) Vektory (vektorové fyzikální veličiny) jsou určeny velikostí a směrem. Vektorovými veličinami jsou posunutí $\vec{s}$, rychlost $\vec{v}$, zrychlení $\vec{a}$, síla $\vec{F}$, hybnost $\vec{p}$ apod. V psaném textu nebo v grafickém vyjádření mohou být vektory značeny také tučným písmem.
Vektory jsou orientované úsečky, můžeme s nimi tedy pracovat jako se stranami trojúhelníku a používat přitom vztahy známé z goniometrie.

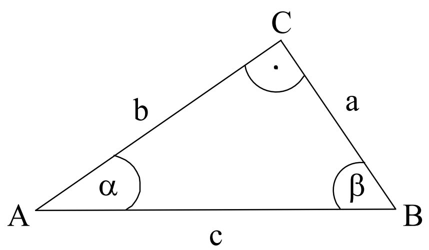
Poznámka:

a) Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$

b) Kosinova věta (používáme pro trojúhelníky určené podle vět *sss, sus*): $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

c) Sinova věta (používáme pro trojúhelníky určené podle vět *usu, Ssu*): $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

d) Goniometrické funkce aplikované v pravoúhlém trojúhelníku:



$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$

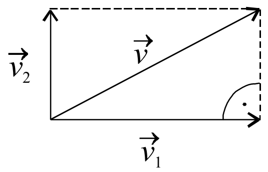
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{b}{a}$$

Př. Míč se pohybuje rychlostí $v_1 = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kolmo na směr jeho pohybu fouká vítr $v_2 = 3\text{ m.s}^{-1}$.
a) Určete výslednou rychlost míče.
Řešení: Výsledný pohyb bude složený z obou pohybů. Míč se bude pohybovat šikmo ve směru vanoucího větru.

Výslednou rychlost $\vec{v}$ získáme tak, že útvar doplníme na rovnoběžník. Výsledná rychlost $\vec{v}$ pak bude tvořit úhlopříčku, která bude zároveň přeponou v pravoúhlém trojúhelníku.

Vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ vektorově složíme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



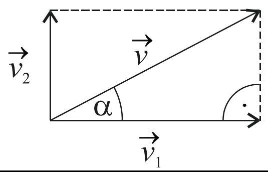
Velikost výsledné rychlosti určíme pomocí Pythagorovy věty: $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$v = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Výsledná rychlost míče bude 5 m·s^{-1}.

b) Určete odklon míče od původního směru.

Řešení:



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$

Míč se odchýlí od původního směru o 36,9°.

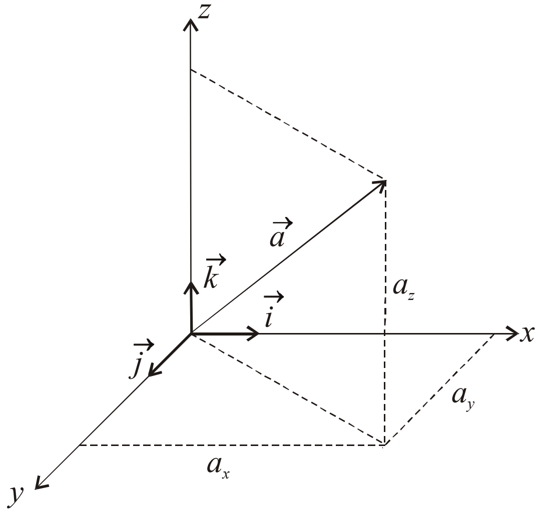
1.2.1 Základní operace s vektory

Při řešení úloh, ve kterých jsou fyzikální veličiny zadány vektorově, používáme vektorovou algebru.

Každá vektorová fyzikální veličina je v prostoru určena třemi složkami (souřadnicemi; x-ovou; y-ovou; z-ovou). Tyto složky lze využít pro zakreslení vektoru do kartézské (pravoúhlé) soustavy souřadnic.

Obecné vyjádření vektoru $\vec{a}$ v kartézském systému souřadnic pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ je dáno tvarem:

$\vec{a} = (a_x ; a_y ; a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$



Př. Při kontaktu nohy s podložkou při chůzi vzniká reakční síla podložky, která působí na dolní končetinu. Tuto sílu můžeme rozložit do tří složek. Vertikální složka síly určuje hlavní zatížení nohy, anteroposteriorní složka se podílí na zbrzdění a zrychlení pohybu nohy (těla) při odvalu chodidla, mediolaterální složka ovlivňuje pohyb nohy při odvalu v tomto směru.

Velikost vektoru $\vec{a}$ zapisujeme $a = |\vec{a}|$. Představuje délku úsečky reprezentující vektor (vzdálenost koncového bodu vektoru od počátku soustavy souřadnic).

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Př. Určete velikost vektoru rychlosti $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$, který je zadaný těmito souřadnicemi $\vec{v} = (3; -2; 6)$.

Řešení: Dosadíme do vztahu pro velikost vektoru a určíme

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Velikost rychlosti je 7 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Směr vektoru v prostoru je stanoven pomocí úhlů α, β, γ, které svírá vektor postupně s jednotlivými osami *x*, *y*, *z* (tzv. *směrových kosinů*)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Př. Určete směr vektoru síly $\vec{F} = (-3; 4; 1)$.

Řešení: Směr vektoru určíme pomocí směrových kosinů, pak:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{26}} = -0{,}588 \Rightarrow \alpha = 53{,}9^{\circ}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{26}} = 0{,}784 \Rightarrow \beta = 38{,}3^{\circ}$$

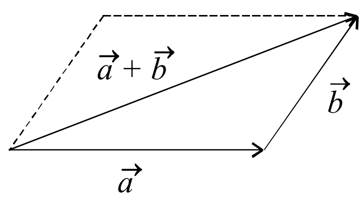
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}} = 0{,}2 \Rightarrow \gamma = 78{,}7^{\circ}$$

---

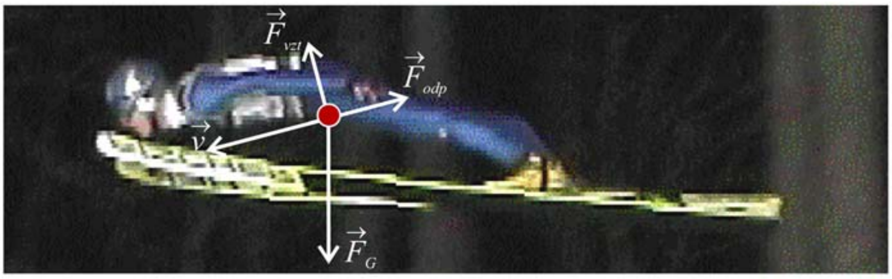
a) Výsledkem skládání vektorů $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = (c_x, c_y, c_z)$$

Graficky skládání vektorů řešíme doplněním na rovnoběžník.

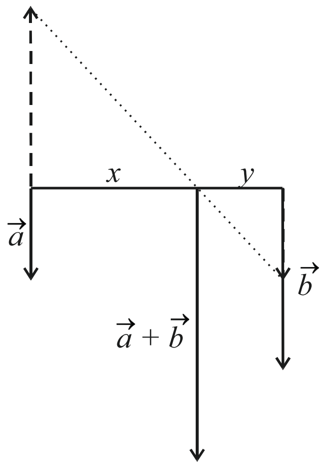


Př. Na skokana na lyžích v letové fázi skoku, který se pohybuje rychlostí $\vec{v}$, působí současně několik sil – tíhová síla ($\vec{F}_G$), odpor prostředí ($\vec{F}_{odp}$), aerodynamická vztlaková síla ($\vec{F}_{vzt}$). Výslednou sílu, která působí na skokana (v těžišti soustavy skokan + lyže) získáme složením těchto působících sil.

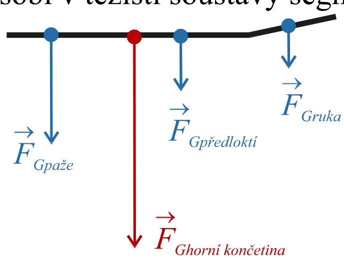


Skládání rovnoběžných, stejně orientovaných vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ se řídí pěti základními pravidly:

1. Výsledný vektor je s oběma vektory rovnoběžný.
2. Výsledný vektor je s oběma stejně orientovaný.
3. Velikost výsledného vektoru je rovna součtu velikostí obou vektorů $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
4. Počátek výsledného vektoru leží na spojnici počátků obou vektorů, blíže většímu vektoru.
5. Počátek výsledného vektoru dělí spojnici počátků obou vektorů v opačném poměru jejich velikostí.
   $|\vec{a}| \cdot x = |\vec{b}| \cdot y$



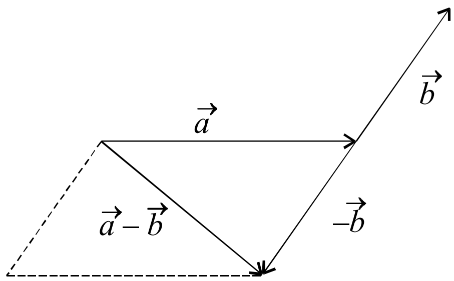
Př. Příkladem skládání rovnoběžných stejně orientovaných vektorů je skládání tíhových sil, které působí na jednotlivé segmenty lidského těla. Výsledným vektorem je vektor tíhové síly, který působí v těžišti soustavy segmentů.



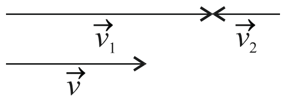
b) Při odčítání vektorů přičítáme vektor opačný

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

$$\vec{d} = \left(a_x - b_x ; a_y - b_y ; a_z - b_z\right) = \left(d_x ; d_y ; d_z\right)$$



Př. Cyklista se pohybuje rychlostí $\vec{v}_1$, proti jeho pohybu fouká vítr rychlostí $\vec{v}_2$. Výslednou rychlost cyklisty $\vec{v}$ určíme jako rozdíl obou rychlostí $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.



c) Násobení vektorů

1. Násobení vektoru $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ skalárem k:

$\vec{b} = k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z)$

Jestliže $k = -1$, pak $\vec{b} = -\vec{a} \Rightarrow$ opačný vektor.

Př. Těleso o hmotnosti $m = 2$ kg se pohybuje se zrychlením $\vec{a} = (4; 5; -1)$ v jednotkách m·s^{-2}. Určete velikost působící síly.

Řešení:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{F} = (2 \cdot 4; 2 \cdot 5; 2 \cdot (-1)) = (8; 10; -2)$

$F = |\vec{F}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + (-2)^2} = \sqrt{168}$ N $\cong 12{,}96$ N

Velikost síly je 12,96 N.

2. Skalární součin vektorů $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

Výsledkem skalárního součinu je skalární veličina.

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$s = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Př. Síla $\vec{F} = (4; 0; 3)$ posune těleso po dráze $\vec{s} = (10; 0; 0)$. Síla je zadána v newtonech, dráha v metrech.

a) Určete práci vykonanou silou $\vec{F}$.

Řešení:

$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y + F_z \cdot s_z = 4 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 40$ J

Práce vykonaná působením dané síly je 40 J.

b) Určete úhel, který spolu svírají vektor síly $\vec{F}$ a vektor posunutí $\vec{s}$.
Řešení:

$$\cos\gamma = \frac{F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y + F_z \cdot s_z}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{N}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{10^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{m}$$

$$\cos\gamma = \frac{4 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{5 \cdot 10} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = 36{,}9^{\mathrm{o}}$$

Vektory síly $\vec{F}$ a posunutí $\vec{s}$ svírají úhel 36,9°.

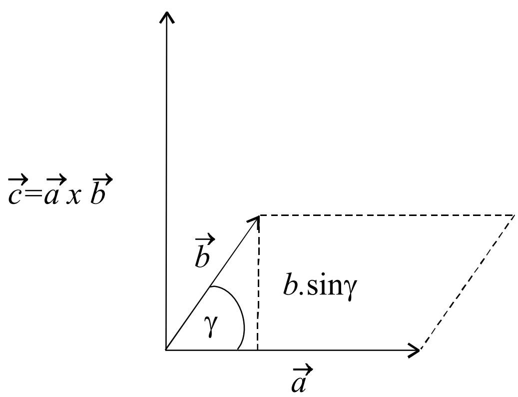
Poznámka: Pokud je skalární součin roven 0, tj. cos γ = 0, pak γ = 90º → vektory jsou navzájem kolmé.

3. Vektorový součin vektorů $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ a $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

Při vektorovém násobení vektorů je výsledkem opět vektor. Píšeme: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
Souřadnice výsledného vektoru získáme vyčíslením determinantu, kde v prvním řádku jsou jednotkové vektory, ve druhém souřadnice prvního vektoru a ve třetím souřadnice druhého vektoru.
Platí:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

Výsledný vektor je $\vec{c}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



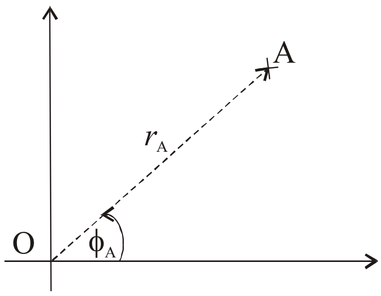
1.2.2 Soustavy souřadnic

a) Kartézská (pravoúhlá) soustava souřadnic

- navzájem kolmé osy x, y, z
  Bod A má souřadnice A = (A_x; A_y; A_z).
- výhodná při řešení pohybů těles

b) Polární

- výhodná pro pohyby, při nichž se nemění vzdálenost tělesa od jednoho bodu – počátku souřadnic (pohyb po kružnici)



c) Cylindrická (válcová, semipolární) soustava souřadnic

- výhodná pro výpočty momentů setrvačností *J* a těžišť těles při rotačních pohybech

d) Sférická (kulová, polární) soustava souřadnic

- výhodná pro výpočty momentů setrvačností *J* a těžišť těles při rotačních pohybech

1.3 Testové otázky

1. *Vyjádření jednotky tlaku (pascal) v základních jednotkách je:*
a) $kg \cdot m \cdot s$
b) $kg \cdot m^{-1} \cdot s$
c) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
d) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

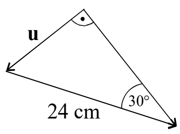
2. *Mezi základní fyzikální veličiny patří*
a) hmotnost, délka, čas
b) dráha, hmotnost, síla
c) rychlost, síla, práce
d) neplatí žádná z těchto možností

3. *Mezi sedm základních jednotek soustavy SI nepatří*
a) metr
b) newton
c) teplotní stupeň
d) sekunda
e) kg

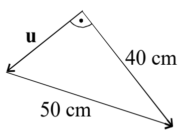
4. *Vektory jsou fyzikální veličiny určené*
a) velikostí, směrem
b) počátkem, velikostí
c) počátkem, směrem
d) velikostí

5. *Skaláry jsou fyzikální veličiny určené*
a) počátkem
b) směrem
c) velikostí
d) orientací

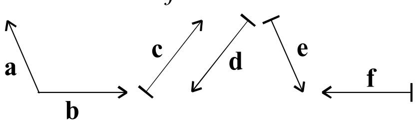
6. *Velikost vektoru **u** je*
a) 6 cm
b) 12 cm
c) 24 cm
d) 54 cm



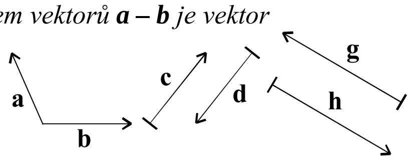
7. *Velikost vektoru **u** je*
a) 10 cm
b) 30 cm
c) 90 cm
d) 200 cm



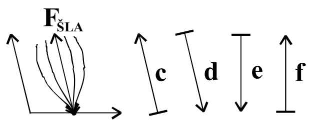
8. *Součtem vektorů **a** + **b** je vektor*
a) **c**
b) **d**
c) **e**
d) **f**



9. *Rozdílem vektorů **a** – **b** je vektor*
a) **c**
b) **d**
c) **g**
d **h**



10. *Rotační složka šlachové síly je vyjádřena vektorem*
a) **c**
b) **d**
c) **e**
d) **f**



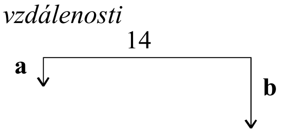
11. *Skalární součin dvou kolmých vektorů je roven*
a) 0
b) 1
c) –1
d) 3,14

12. *Ve kterém případě je síla $\mathbf{F}_1$ kolmá na sílu $\mathbf{F}_2$*
a) $\mathbf{F}_1 = (-1; 2; 3)$ $\mathbf{F}_2 = (1; 2; 3)$
b) $\mathbf{F}_1 = (0; 7; 0)$ $\mathbf{F}_2 = (-1; 7; -1)$
c) $\mathbf{F}_1 = (3; 2; 1)$ $\mathbf{F}_2 = (1; 2; 3)$
d) $\mathbf{F}_1 = (-1; 2; 3)$ $\mathbf{F}_2 = (3; 0; 1)$

13. *Vektorový součin dvou vektorů je*
a) vektor
b) skalár
c) vektor nebo skalár

14. *Nechť **a**, **b** jsou dva rovnoběžné vektory, které jsou souhlasně orientované. Určete, které z následujících tvrzení je pravdivé.*
a) součet vektorů **a**, **b** je roven většímu z nich
b) součet vektorů **a**, **b** je vektor opačně orientovaný
c) součet vektorů **a**, **b** má s každým z vektorů **a**, **b** právě jeden společný bod
d) součet vektorů **a**, **b** je vektor rovnoběžný s **a**, **b**

15. *Působiště výslednice součtu vektorů **a**, **b** (|**a**| = 2, |**b**| = 5) leží ve vzdálenosti*
a) 2 cm od vektoru **a**
b) 2 cm od vektoru **b**
c) 4 cm od vektoru **a**
d) 4 cm od vektoru **b**
e) nelze určit



16. *Vektorovými veličinami jsou dvojice*
a) hmotnost, síla
b) čas, rychlost
c) rychlost, síla
d) hmotnost, hybnost

Řešení: 1d, 2a, 3b, 4a, 5c, 6b, 7b, 8a, 9c, 10d, 11a, 12d, 13a, 14d, 15d, 16c

2 KINEMATIKA

Mechanika je nejstarším fyzikálním oborem. Původně se zabývala konstrukcí a činností strojů. Slovo mechanika pochází z řeckého *méchané,* což znamená stroj.
Mechanika studuje zákonitosti mechanického pohybu. Mechanickým pohybem rozumíme změnu polohy tělesa nebo jeho částí vzhledem k jiným tělesům nebo k jinému, tzv. vztažnému tělesu, v závislosti na čase. Spojením vztažného tělesa se souřadnou soustavou vznikne vztažná soustava.

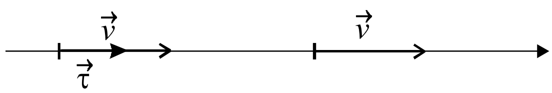
Slovo kinematika pochází z řeckého *kineo*, což znamená pohyb.
Kinematika studuje a popisuje pohyb těles bez ohledu na jeho příčinu, tj. na působící sílu.

Poznámka: Často bývá v textu pojem tělesa nahrazen termínem hmotný bod. Hmotný bod je objekt, jehož rozměry a tvar můžeme při řešení určitého problému zanedbat a úlohu si tak zjednodušit.

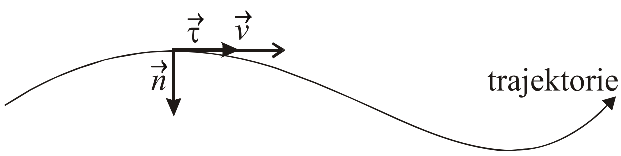
Základními veličinami, které používáme k popisu pohybu, jsou polohový vektor $\vec{r}$, rychlost $\vec{v}$, zrychlení $\vec{a}$.

2.1 Dělení pohybů

Pohyby dělíme podle:
a) Trajektorie (křivka, po které se těleso pohybuje)
1) *přímočaré* – trajektorií pohybu je přímka, vektor rychlosti $\vec{v}$ má stále stejný směr



2) *křivočaré* – trajektorií pohybu je křivka, vektor rychlosti $\vec{v}$ mění svůj směr. V každém bodě pohybu tělesa je tečnou k trajektorii. Typickými křivočarými pohyby jsou pohyb po kružnici, vrh vodorovný, vrh šikmý.



Vektor $\vec{\tau}$ je směrový vektor, je orientovaný ve směru pohybu. Je rovnoběžný s vektorem rychlosti.
Vektor $\vec{n}$ je normálový vektor, je vždy kolmý ke směru pohybu. Je kolmý k vektoru rychlosti.

Uvědomte si, že předkládané vzorce a pravidla v sobě odrážejí reálné děje, které probíhají v našem okolí. Vektor $\vec{\tau}$ má stejný směr jako vektor rychlosti $\vec{v}$, ovlivňuje tedy velikost rychlosti. Normálový vektor $\vec{n}$ má vliv na tvar trajektorie, na její zakřivení.

Poznámka: Označení vektorů $\vec{\tau}, \vec{n}$ je obecně užívané. Pro snadnější pochopení si můžete tyto vektory nahradit vektorem tečného $\vec{a}_t$ a normálového $\vec{a}_n$ zrychlení (viz kapitola 2.12.1).

b) Rychlosti
1) *rovnoměrný* $\Rightarrow a = 0$ m·s^{-2}
2) *rovnoměrně proměnný* (zrychlený, zpomalený) $\Rightarrow a =$ konst.
3) *nerovnoměrně proměnný* (zrychlený, zpomalený) $\Rightarrow a \neq$ konst.

2.2 Popis pohybu pomocí vektorů

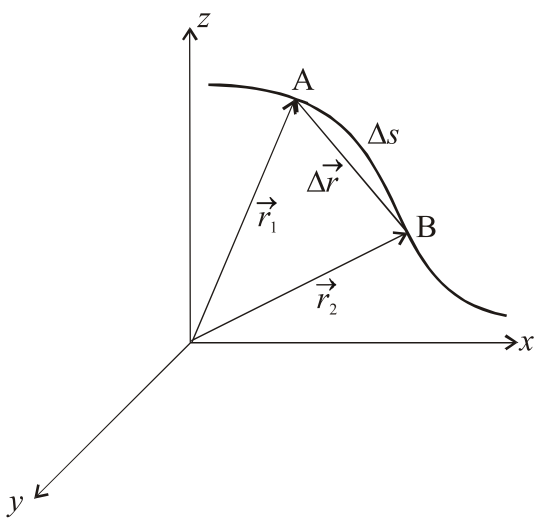
Polohu hmotného bodu v prostoru ve zvolené vztažné soustavě určíme pomocí souřadnic. Tyto souřadnice jsou totožné s polohou koncového bodu polohového vektoru $\vec{r}$ (vektor s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic, viz poloha bodů A, B v následujícím obrázku).

Polohový vektor můžeme zapsat dvěma způsoby:
1. $\vec{r} = (x; y; z)$ 2. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory (úseky na osách kartézské soustavy souřadnic), jejich velikost je rovna jedné.

Velikost polohového vektoru určuje vzdálenost bodu (tělesa) od počátku soustavy souřadnic.
$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.3 Rychlost

Při pohybu tělesa dochází ke změně jeho souřadnic. Souřadnice jsou časově proměnné, říkáme, že jsou funkcemi času.
$x = f(t),\ y = f(t,),\ z = f(t)$
Koncový bod polohového vektoru opisuje trajektorii.



Těleso urazí za určitý časový interval Δt dráhu Δs. Dojde přitom ke změně polohového vektoru $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Při svém pohybu má těleso rychlost, která je charakterizována změnou polohového vektoru, ke které dojde během časového intervalu $\vec{v} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$.

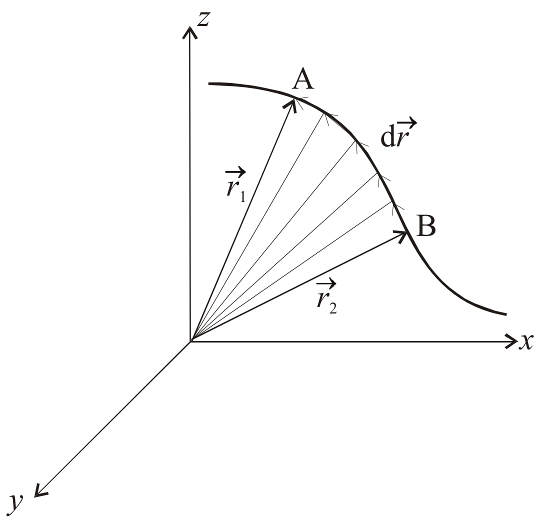
Jednotka rychlosti: $[v] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Vidíme, že při tomto vyjádření pohybu se změna polohového vektoru $\Delta \vec{r}$ příliš neztotožňuje se skutečnou trajektorií $\Delta \vec{s}$.

Rychlost, kterou stanovíme tímto postupem, se nazývá průměrná rychlost $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Průměrná rychlost chůze, dopravního prostředku, … je v praxi velice často používána. Pro určení parametrů pohybu má však větší význam rychlost okamžitá – rychlost v okamžiku odrazu, v okamžiku odhodu, v okamžiku kontaktu dvou těles apod.

Pro určení okamžité rychlosti, kterou má těleso v daném časovém okamžiku, používáme infinitezimální počet (spojený se jménem matematika Leibnitze – derivace, integrál).



Časový interval Δt rozdělíme na mnohem menší časové úseky. Tak malé, že se jejich velikost bude v limitě blížit k nule. Změna polohových vektorů v těchto intervalech bude kopírovat trajektorii Δs. Tyto malé změny označíme $\mathrm{d}\vec{r}$. Nastanou během velmi malého časového intervalu $\mathrm{d}t$.

Okamžitou rychlost pak budeme definovat pomocí vztahu $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$.

Matematicky tento vztah zapíšeme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

Čteme: rychlost je derivace polohového vektoru (dráhy) podle času.

2.4 Zrychlení

Jestliže se při výpočtech mění souřadnice vektoru rychlosti, pak to znamená, že se těleso pohybuje se zrychlením $\vec{a}$.

Zrychlení je změna vektoru rychlosti, ke které dojde během časového intervalu.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Jednotka zrychlení: $[a] = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Podobným způsobem jako průměrnou rychlost budeme definovat průměrné zrychlení. To lze vyjádřit jako celkovou změnu rychlosti za celý časový interval.

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Okamžité zrychlení získáme, jestliže časový interval zmenšíme na minimum.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Čteme: zrychlení je derivace vektoru rychlosti podle času.

Za předpokladu, že určíme pomocí derivace souřadnice vektorů, můžeme stanovit hodnotu velikosti okamžité rychlosti a zrychlení pomocí vztahů

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

2.5 Funkční popis pohybu

Vektorové vyjádření pohybu umožňuje přesné určení dané polohy i směru pohybu. V některých případech však není nutná znalost konkrétní polohy. Potom pracujeme s vyjádřením funkční závislosti dráhy na čase $s = f(t)$.

Pak rychlost pohybu je dána vztahem $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ a zrychlení je $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Poznámka: Následující příklad je určen pro případné zájemce. Jeho výpočet, který je v silách většiny čtenářů, však umožní významným způsobem pochopit studovanou problematiku.

Při výpočtu použijeme základní vztah pro derivování $(x^n)' = n.x^{n-1}$, kde x je obecná proměnná.

Derivace konstanty je rovna nule, c´= 0.

Tedy platí např.: $(t^2)' = 2t$; $(3t^4)' = 3 \cdot 4t^3 = 12t^3$; $(t^5 + 5t^8 + 4)' = 5t^4 + 40t^7$

Př. Těleso se pohybuje tak, že se jeho dráha mění podle funkce $s = t^3 + 2t^2 - 4t$.

a) Určete dráhu, kterou těleso urazí za tři sekundy pohybu.

Řešení:

$$s_3 = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 18 - 12 = 15\,\mathrm{m}$$

Těleso urazí za tři sekundy dráhu 15 m.

b) Určete rovnici rychlosti a rychlost v čase $t = 3$ s.

Řešení:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4t - 4$$

$v_3 = 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4 = 27 + 12 - 4 = 35\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

V čase $t = 3$ s je rychlost tělesa 35 m·s^{-1}.

c) Určete velikost počáteční rychlosti ($t = 0$ s).
Řešení:
$v_0 = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$ m·s^{-1}
Záporné znaménko před hodnotou rychlosti znamená, že se těleso původně pohybovalo opačným směrem.

d) Určete čas, ve kterém je těleso v klidu.
Řešení:
Těleso je v klidu právě tehdy, když $v = 0$.
$0 = 3t^2 + 4t - 4$
Řešíme kvadratickou rovnici.

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$t_1 = 0{,}67$ s
$t_2 = -2$ s
Záporný čas nemá z fyzikálního hlediska smysl, těleso bylo v klidu v čase $t = 0{,}67$ s.

e) Určete rovnici zrychlení.
Řešení:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6t + 4$$

Zrychlení v čase t určíme ze vztahu $6t + 4$.

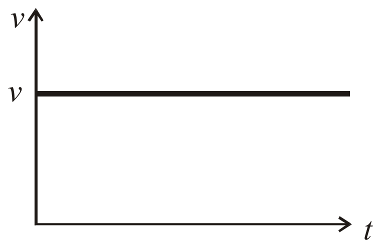
f) Určete zrychlení v čase $t = 5$ s.
Řešení:
$a = 6 \cdot 5 + 4 = 34$ m·s^{-2}
Velikost zrychlení v čase 5 s je 34 m·s^{-2}.

g) Určete druh pohybu.
Řešení:
Vidíme, že zrychlení není konstantní. Jedná se o nerovnoměrně zrychlený pohyb.

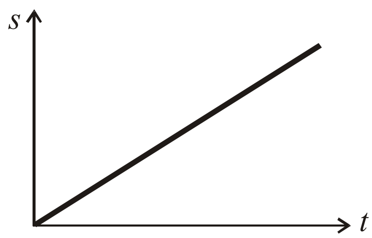
V předchozím řešeném příkladu jsme postupovali ve výpočtech od dráhy k rychlosti a nakonec ke zrychlení pomocí derivování ($s(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$). Je samozřejmé, že existuje i opačný postup, a tímto postupem je integrování, kdy ze znalosti zrychlení v závislosti na čase můžeme postupně odvodit rychlost a dráhu ($a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$).

2.6 Rovnoměrný přímočarý pohyb

Při tomto pohybu se těleso pohybuje konstantní rychlostí. Za stejné časové intervaly urazí těleso stejnou dráhu. Protože se rychlost nemění, je zrychlení pohybu nulové.
Potom v = konst., grafickým znázorněním je přímka rovnoběžná s časovou osou.

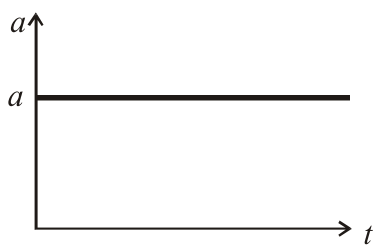


Dráhu rovnoměrného pohybu získáme ze vztahu $s = vt + s_0$, kde s_0 je velikost počáteční dráhy.
Dráha roste přímo úměrně v závislosti na čase. Grafickým znázorněním této závislosti je přímka různoběžná s časovou osou (uvedený graf platí pro $s_0 = 0$).

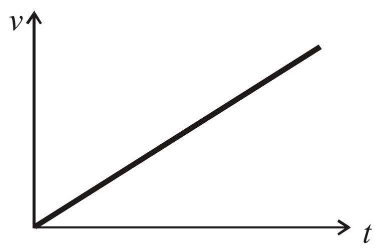


2.7 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Rychlost tohoto pohybu rovnoměrně roste v závislosti na čase. Za stejné časové intervaly vzroste o stejnou hodnotu. Zrychlení je tedy konstantní.
Potom a = konst., grafickým znázorněním je přímka rovnoběžná s časovou osou.

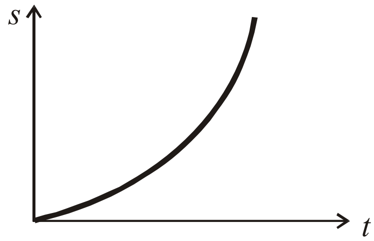


Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu získáme ze vztahu $v = at + v_0$, kde v_0 je velikost počáteční rychlosti.
Grafickým znázorněním je přímka různoběžná s časovou osou (uvedený graf platí pro $v_0 =$ 0).



Dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu vyjádříme pomocí vztahu
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$,

kde s_0 je počáteční dráha.
Dráha je vyjádřena kvadratickou závislostí. Proto grafickým znázorněním závislosti dráhy na čase je parabola (uvedený graf platí pro $s_0 = 0$).



2.8 Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb

Zrychlení tohoto pohybu je orientováno proti směru vektoru rychlosti. Vzhledem k tomu, že používáme nevektorové vyjádření, zapíšeme do rovnice pro rychlost a dráhu zrychlení se záporným znaménkem.

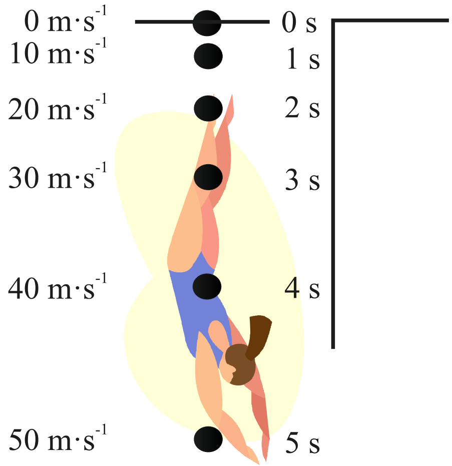
Platí vztahy $v = -at + v_0$, $s = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$.

Budeme-li předpokládat, že počáteční rychlost a dráha jsou rovny nule, pak pro pohyb rovnoměrný přímočarý a pohyb rovnoměrně zrychlený přímočarý dostáváme zjednodušené, často používané vztahy.
$s = vt$ resp. $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$

2.9 Volný pád

Volný pád je zvláštním případem rovnoměrně zrychleného pohybu přímočarého. Všechna volně puštěná tělesa se v tíhovém poli Země pohybují se stejným zrychlením. Toto zrychlení nazýváme tíhové zrychlení, značíme je g. Hodnota tíhového zrychlení v naší zeměpisné šířce je $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Je-li počáteční rychlost volného pádu $v_0 = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a počáteční dráha $s_0 = 0$ m, pak pro rychlost a dráhu volného pádu platí
$v = gt$, $s = \frac{1}{2}gt^2$.



Na uvedeném obrázku vidíme, jak se rychlost padajících objektů zvětšuje v závislosti na čase. Grafickým znázorněním této závislosti je, stejně jako u obecného rovnoměrně zrychleného pohybu, přímka různoběžná s časovou osou. Grafickým znázorněním závislosti dráhy na čase je parabola.

2.10 Nerovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Tělesa se mohou obecně pohybovat libovolným způsobem, s tímto jevem se setkáváme především u živých organismů, tedy i u člověka. V tomto případě nelze vyjádřit příslušné veličiny pomocí jednoduchých vzorců. Výpočty kinematických veličin (dráhy, rychlosti a zrychlení) řešíme pomocí derivování a integrování.

2.11 Složené pohyby

Pohyb těles, tedy i lidského těla, se v mnoha případech vyznačuje extrémní složitostí. Podaří-li se nám tento složený pohyb vyjádřit pomocí pohybů jednodušších (rovnoměrný přímočarý a rovnoměrně proměnný přímočarý), potom můžeme parametry pohybu vyjádřit pomocí známých, výše uvedených vzorců. K tomu využijeme znění zákonu o nezávislosti pohybů.

Zákon o nezávislosti pohybu

Koná-li hmotný bod současně dva nebo více pohybů, je jeho výsledná poloha taková, jako kdyby konal tyto pohyby po sobě, a to v libovolném pořadí.

Vrhy jsou složené pohyby. Těleso je vrženo v určitém směru počáteční rychlostí v_0. Vlivem tíhového pole Země se těleso v každém okamžiku zároveň pohybuje volným pádem ve směru svislém. V závislosti na směru počáteční rychlosti rozlišujeme vrh svislý, vodorovný a šikmý.

2.11.1 Vrh svislý vzhůru

Při vrhu svislém vzhůru skládáme dva pohyby:

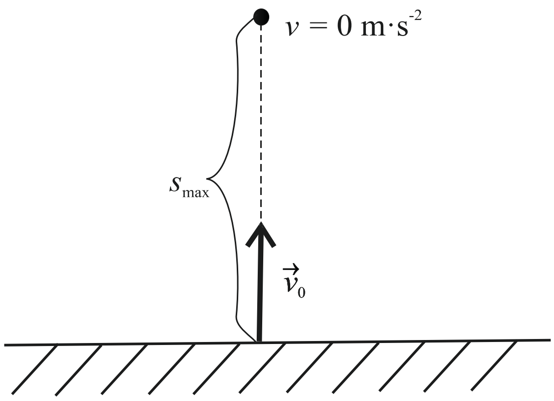
1. *Rovnoměrný přímočarý vzhůru* – pro dráhu s_1 a pro rychlost v_1 platí vztahy

$$s_1 = v_0 t \qquad v_1 = v_0 = \text{konst.}$$

Kdyby neexistovalo tíhové pole Země (odpor vzduchu neuvažujeme), pak by se těleso pohybovalo konstantní rychlostí v_0 vzhůru.

2. *Rovnoměrně zrychlený (volný pád) dolů* – pro dráhu s_2 a pro rychlost v_0 platí vztahy

$s_2 = \frac{1}{2} g t^2$ $v_2 = g t$



Protože dráha jako posunutí a rychlost jsou vektorové veličiny, můžeme je vektorově skládat
$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
Protože vektory posunutí a rychlostí jsou opačně orientované, budeme je odečítat.

Výsledkem je okamžitá hodnota dráhy, kterou chápeme jako okamžitou výšku tělesa nad povrchem Země

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Okamžitou hodnotu rychlosti popíšeme vztahem $v = v_0 - g t$.
Rychlost se během pohybu mění. Postupně klesá, až v maximální výšce je rovna nule. Poté těleso padá volným pádem a rychlost opět roste.

Doba výstupu
Dobu výstupu určíme z podmínky pro rychlost. Pro dobu výstupu t_v je rychlost nulová (v nejvyšším bodě dráhy $v = 0$ m·s^{-1}).

Z rovnice $0 = v_0 - g t_v$ vyplývá $t_v = \frac{v_0}{g}$.

Stejnou dobu, po kterou těleso stoupá, zároveň i padá. Pak doba letu t_L je dvakrát větší než doba výstupu t_v a tedy

$$t_L = 2 t_v = \frac{2 v_0}{g} .$$

Maximální výška
Těleso vystoupí do maximální výšky za dobu výstupu t_v. Po dosazení dostaneme

$$s_{max} = v_0 t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} .$$

Po úpravě je $s_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Př. Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 30$ m·s^{-1}.
Určete

a) jeho výšku v čase $t = 2\,\mathrm{s}$,
b) jeho rychlost ve stejném čase,
c) dobu výstupu,
d) maximální výšku.
Tíhové zrychlení uvažujte $g = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.
Řešení:
a) Dosadíme do vztahu pro okamžitou výšku hodnoty rychlosti vrhu a času

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 30 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 40\,\mathrm{m}$$

Výška tělesa v čase $t = 2$ s je 40 m.

b) Pro rychlost platí
$v = v_0 - gt = 30 - 10{\cdot}2 = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
Rychlost tělesa v čase $t = 2$ s je 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
c) Dosadíme do vzorce pro dobu výstupu

$$t_v = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{10} = 3\,\mathrm{s}$$

Doba výstupu, kdy se těleso zastaví, je 3 s.

d) Maximální výšku určíme ze vztahu

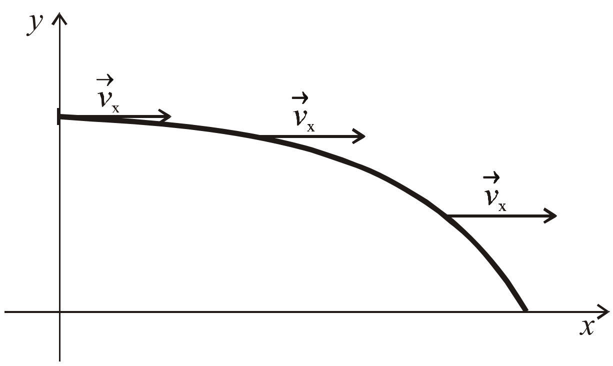
$$s_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} = 45\,\mathrm{m}$$

Maximální výška výstupu tělesa je 45 m.

2.11.2 Vrh vodorovný

Je složen ze dvou pohybů:
1. *Rovnoměrný přímočarý ve směru osy x*
Těleso je při vodorovném vrhu v určité výšce y vrženo počáteční rychlostí v_0 ve vodorovném směru. Kdyby neexistovalo tíhové pole Země, pak by se těleso pohybovalo rovnoměrným pohybem ve směru osy x.
Pro dráhu a rychlost platí:

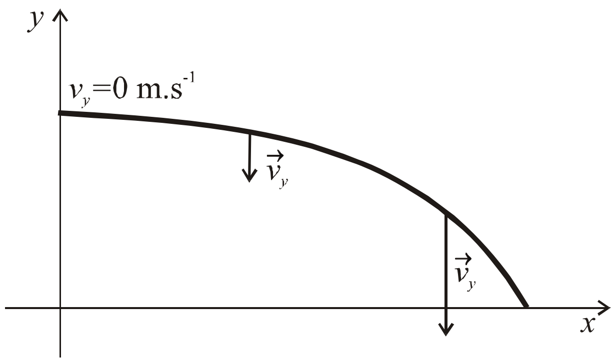
$$x = v_0\, t \qquad\qquad v_x = v_0 = \text{konst.}$$



2. *Rovnoměrně zrychlený (volný pád) ve směru osy y*

Vzhledem k existenci tíhového pole se těleso v každém okamžiku pohybuje volným pádem. Pro dráhu a rychlost platí:

$y = \frac{1}{2} g t^2$ $\qquad v_y = g t$.

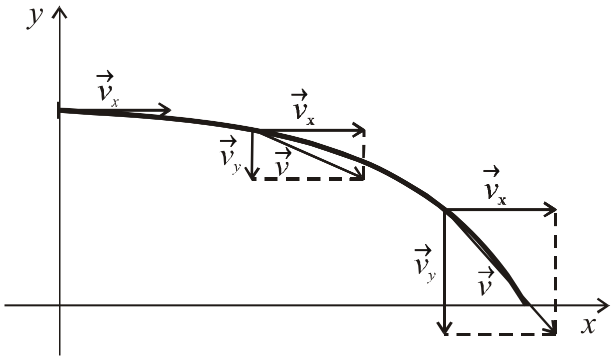


Rychlost ve směru osy y lineárně roste v závislosti na čase.
Trajektorií pohybu při vodorovném vrhu je parabola. Hledáme tedy funkci ve tvaru
$y = k x^2$.
Při řešení vyjádříme z jedné rovnice čas a dosadíme do druhé rovnice.

Pak $t = \frac{x}{v_0}$ a $y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$.

Po úpravě druhé rovnice dostáváme $y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2$, kde tíhové zrychlení a počáteční rychlost jsou konstanty.

Rychlosti ve směru os x a y jsou vektorovými veličinami. Jestliže je složíme, dostaneme celkovou rychlost $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.



Vzhledem k tomu, že tyto rychlosti jsou na sebe kolmé, pak okamžitou celkovou rychlost vypočteme podle vztahu
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Př. Jakou rychlostí musí být vodorovným směrem vrženo těleso z výšky 30 m, aby dopadlo do vzdálenosti 20 m od vertikály.
Řešení:

Z rovnice délky letu $x = v_0 t$ vyjádříme čas $t = \dfrac{x}{v_0}$ a dosadíme do rovnice pro výšku vrhu $y = \dfrac{1}{2} g t^2 = \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow v_0^2 = \dfrac{g x^2}{2y} = \dfrac{10 \cdot 20^2}{2 \cdot 30} = \sqrt{66{,}7}\ \mathrm{m.s^{-1}} \cong 8{,}17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Aby těleso dopadlo do vzdálenosti 20 m od místa vrhu, musí být jeho počáteční rychlost 8,17 m·s^{-1}.

2.11.3 Vrh šikmý

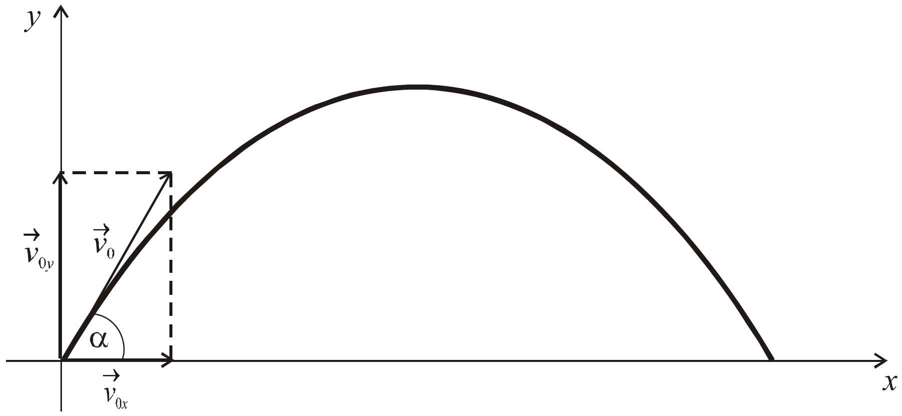
Tento vrh je složen ze dvou pohybů:

1. *Rovnoměrný přímočarý ve směru počáteční rychlosti.*
2. *Rovnoměrný zrychlený (volný pád) ve směru osy y.*

Těleso je v tomto případě vrženo vzhledem k vodorovné rovině pod úhlem α rychlostí v_0.

Při řešení rozložíme počáteční rychlost $\vec{v}_0$ jako vektor do dvou navzájem kolmých směrů. Složky počáteční rychlosti pak budou vyjádřeny takto:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad\qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$



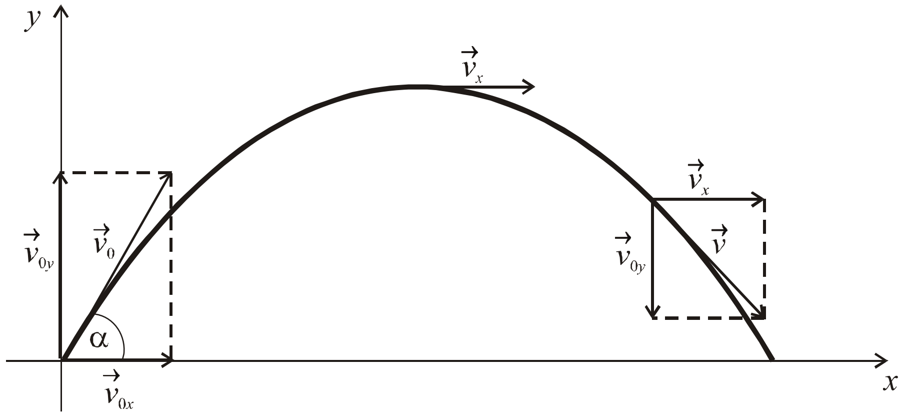
Jestliže nebudeme uvažovat odpor prostředí, pak bude rychlost ve směru osy x konstantní a bude platit

$$v_x = v_{0x} \qquad \Rightarrow \qquad v_x = v_0 \cos\alpha .$$

Rychlost ve směru osy y bude ovlivňovaná silovým působením Země a zapíšeme ji pomocí vztahu

$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$

Y-ová složka rychlosti se bude zmenšovat. V maximální výšce bude nulová, pak opět poroste na maximální hodnotu.



Celková rychlost $\vec{v}$ bude určena vektorovým součtem $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Její velikost určíme pomocí Pythagorovy věty $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Poznámka: Označený text je určený pro případné zájemce.

X-ovou a y-ovou souřadnici tělesa v libovolném časovém okamžiku určíme podle základního vztahu mezi dráhou a rychlostí $s = \int v\mathrm{d}t$, tedy pomocí integrací obou příslušných rychlostí. Pak bude platit $x = \int v_0 \cos\alpha \, \mathrm{d}t$.
Protože proměnnou veličinou je čas *t*, zatímco úhel vrhu a rychlost vrhu jsou konstanty, je možné je vytknout před integrál. Pak platí $x = v_0 \cos\alpha \int \mathrm{d}t = v_0 t \cos\alpha$.
x-ová souřadnice je pak dána vztahem $x = v_0 t \cos\alpha$.
Stejným způsobem budeme řešit y-ovou souřadnici pohybu. $y = \int (v_0 \sin\alpha - gt)\mathrm{d}t = \int v_0 \sin\alpha \, \mathrm{d}t - \int gt\mathrm{d}t$

Y-ová souřadnice je určena vztahem
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$
Při zadaných hodnotách úhlu vrhu a počáteční rychlosti vrhu snadno určíme souřadnice tělesa v libovolném časovém okamžiku.

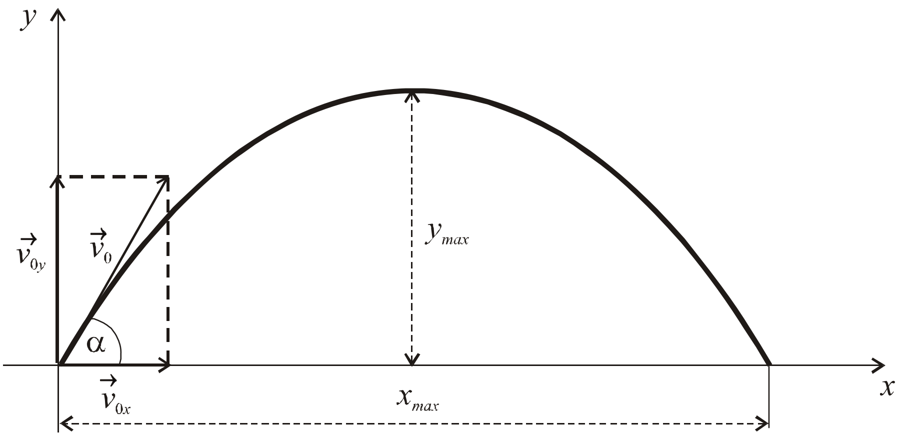
Určení vybraných parametrů při šikmém vrhu s počáteční výškou $h = 0$.

Doba výstupu
Těleso stoupá do maximální výšky. Rychlost ve směru osy y postupně klesá, v maximální výšce je $v_y = 0$. Dobu výstupu t_v určíme ze vztahu $0 = v_0 \sin\alpha - g t_v$.

Doba výstupu je $t_v = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Doba letu $t_L = 2t_v = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$.

Maximální výška
Maximální výšky y_{max} dosáhne těleso za dobu výstupu t_v.



Určíme ji ze vztahu pro hodnotu y-ové souřadnice dosazením doby výstupu za čas *t*.

$$y_{\max} = v_0\, t_v \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_v^2 = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}.$$

Po úpravě dostaneme $y_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Maximální dolet

Do maximální vzdálenosti x_{max} dopadne těleso za dobu letu t_L. Určíme ji ze vztahu pro hodnotu x-ové souřadnice dosazením doby letu za čas *t*.

$$x_{\max} = v_0\, t_L \cos\alpha = v_0 \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha$$

Po úpravě dostaneme $x_{\max} = \dfrac{v_0^2\, 2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$.

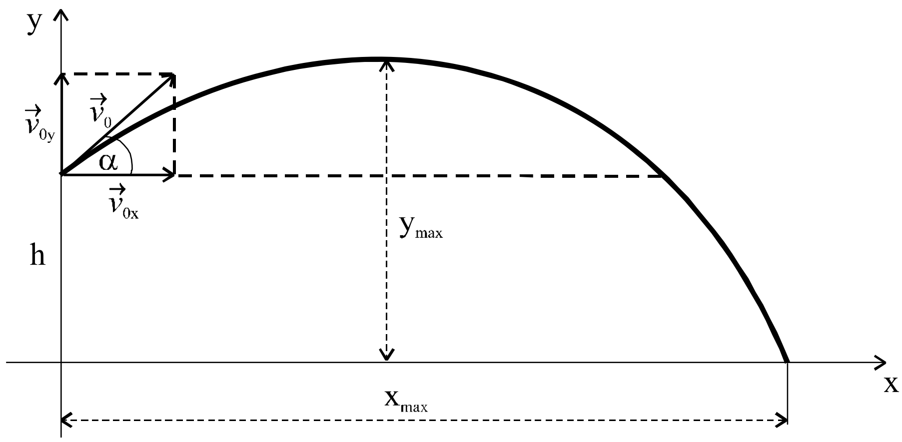
Jestliže použijeme goniometrický vzorec pro sinus dvojnásobného argumentu, pak maximální dolet vyjádříme ve tvaru $x_{\max} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Všechny uvedené vztahy platí pro nulovou počáteční výšku. Za nulovou můžeme považovat počáteční výšku např. při kopu do míče ze země. V praxi je zpravidla počáteční výška šikmého vrhu různá od nuly. To se týká trajektorie tělesa při většině hodů a vrhů, ale také trajektorie těžiště lidského těla při některých odrazech, např. při skoku dalekém.

V tomto případě (počáteční výška $h \neq 0$) jsou základní parametry určeny podle těchto vztahů:

Maximální výška $\quad y_{\max} = v_0\, t \sin\alpha - \dfrac{g\, t^2}{2} + h$

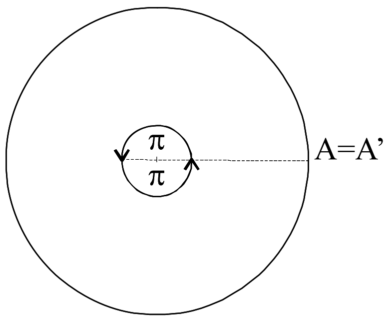
Maximální dolet $\quad x_{\max} = \dfrac{v_0^2 \cos 2\alpha}{g} \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \dfrac{2 g h}{v_0^2}} \right)$



Ze vzorců (ale i z vlastní úvahy) pro maximální výšku, resp. maximální dolet vyplývá, které z parametrů jsou důležité pro dosažení maxima. Pro vrh svislý je to počáteční rychlost, pro vodorovný vrh počáteční rychlost a počáteční výška. Pro vrh šikmý s nulovou počáteční výškou jsou těmito parametry velikost počáteční rychlosti a úhel, pod kterým je pohyb zahájen. Pro zbývající svislé vrhy musíme vzít navíc v úvahu velikost počáteční výšky.

2.12 Pohyb po kružnici

Nejčastěji studovaným křivočarým pohybem je pohyb po kružnici. Trajektorií pohybu je kružnice. Jestliže se těleso pohybuje z bodu A, pak se po určité době dostane zpět do původního postavení, platí A’ = A.

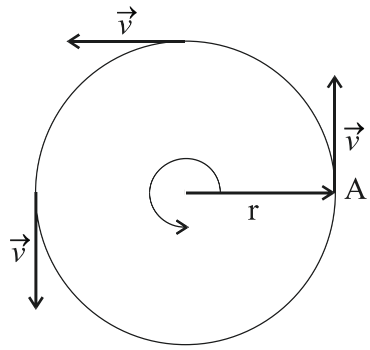


Jedná se o pohyb periodický. Veličina, která charakterizuje tento pohyb časově, se nazývá perioda *T*.

Perioda je nejkratší doba, za kterou se těleso dostane zpět do své původní polohy.
Jednotka periody: $[T] = \mathrm{s}$
Mimo periodu zavádíme veličinu, která se nazývá frekvence *f*.
Frekvence představuje počet oběhů za sekundu.
Mezi periodou a frekvencí platí vztah $f = \frac{1}{T}$.
Jednotkou frekvence je hertz, $[f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

2.12.1 Obvodové veličiny

Jestliže se těleso bude pohybovat po kružnici, pak vektor rychlosti bude v každém bodě pohybu tečnou k trajektorii a bude kolmý na průvodič. Průvodič představuje spojnici tělesa se středem kružnice (v tomto případě je velikost průvodiče rovna poloměru kružnice r).

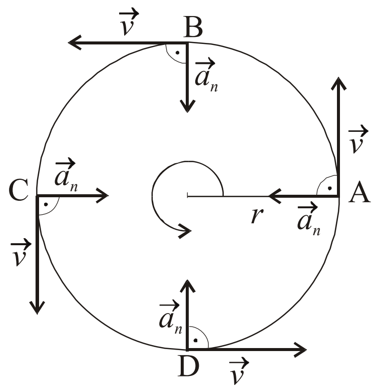


Vektor rychlosti mění svůj směr. Změna směru rychlosti je způsobena dostředivým (normálovým) zrychlením $\vec{a}_n$. Toto zrychlení je orientováno ve směru normálového vektoru $\vec{n}$ (viz křivočarý pohyb). Tento vektor je vždy kolmý k vektoru rychlosti $\vec{v}$.
Normálové (dostředivé) zrychlení směřuje vždy do středu křivosti.

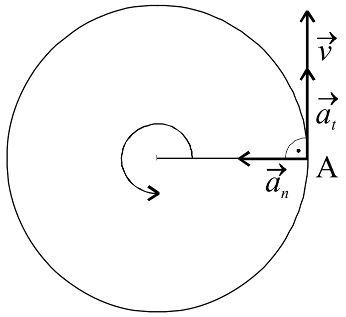
Platí: $a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

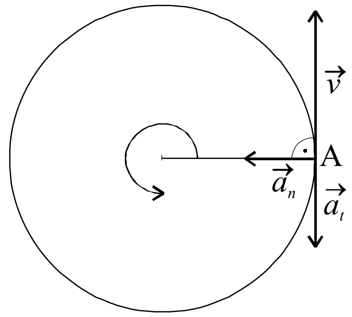
Jednotka normálového zrychlení: $[a_n] = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

U rovnoměrného pohybu po kružnici má vektor rychlosti stále stejnou velikost a rovněž normálové zrychlení je, co do velikosti, konstantní.



Změna velikosti rychlosti je způsobena tečným zrychlením $\vec{a}_t$.
Tečné zrychlení je orientováno ve směru tečného vektoru $\vec{\tau}$ (viz křivočarý pohyb).
U zrychleného pohybu má stejný směr jako vektor rychlosti $\vec{v}$, u zpomaleného pohybu má opačný směr vzhledem k vektoru rychlosti $\vec{v}$.



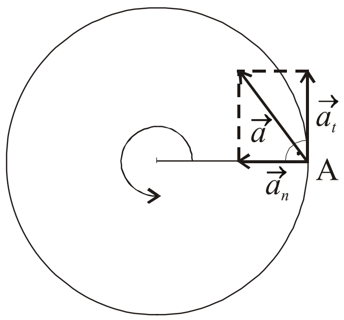


Okamžitá hodnota tečného zrychlení je určena vztahem $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Představuje změnu velikosti rychlosti v daném časovém okamžiku.
Jednotka tečného zrychlení: $[a_t] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

S tečným a normálovým zrychlením pracujeme jako s vektorovými veličinami. Vektorovým složením určíme celkové (absolutní, výsledné) zrychlení $\vec{a}$.

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$



Velikost výsledného zrychlení určíme podle Pythagorovy věty $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Př. Těleso se pohybuje po kružnici o poloměru r = 50 m rychlostí v = 20 m·s^{-1}. Určete velikost jeho normálového a celkového zrychlení, je-li velikost tečného zrychlení a_t = 12 m·s^{-2}.

Řešení:

a) Pro určení normálového zrychlení použijeme vztah

$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{50} = \frac{400}{50} = 8$ m·s^{-2}.

Velikost normálového zrychlení je 8 m·s^{-2}.

b) Velikost celkového zrychlení určíme použitím Pythagorovy věty

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 14{,}4$ m·s^{-2}

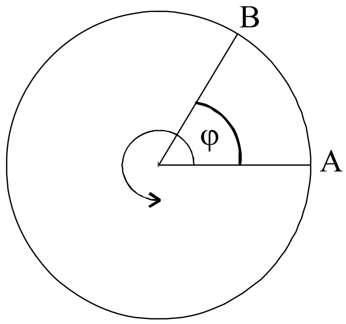
Velikost celkového zrychlení je 14,4 m·s^{-2}.

2.12.2 Úhlové veličiny

Kromě obvodových veličin je pohyb po kružnici často popisován pomocí veličin úhlových: úhlová dráha φ, úhlová rychlost ω, úhlové zrychlení ε.

Př. Popisujeme-li pohyb segmentu, např. flexe v loketním kloubu, pak v mnoha případech nepracujeme s dráhou, kterou opisuje zápěstí, ale se změnou úhlu v loketním kloubu.

Úhlová dráha φ představuje úhel, o který se hmotný bod otočí za určitý čas při pohybu po kružnici. Úhlová dráha je funkcí času $\varphi = \mathrm{f}(t)$.
Jednotka úhlové dráhy je radián, $[\varphi] = \mathrm{rad}$.
Obvodová dráha je úměrná úhlové dráze.
Platí $s = \varphi\, r$.



Úhlová rychlost ω je charakterizována změnou velikosti úhlové dráhy, která nastane během časového intervalu.
Jednotka úhlové rychlosti: $[\omega] = \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

O celý úhel 2π se těleso otočí za dobu jedné periody *T*. Úhlovou rychlost pak můžeme vyjádřit ve tvaru $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
Čím vyšší je frekvence otáčení, tím je úhlová rychlost větší.

Obvodová rychlost je úměrná úhlové rychlosti. Platí $v = \omega\, r$.
Jestliže se úhlová rychlost během pohybu mění, pak se těleso pohybuje s úhlovým zrychlením ε.
Úhlové zrychlení ε představuje změnu velikosti úhlové rychlosti, ke které dojde během časového intervalu.
Jednotka úhlového zrychlení: $[\varepsilon] = \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$.
Úhlové zrychlení má stejný význam jako zrychlení tečné. Platí $a_t = \varepsilon\, r$.

Př. Těleso se pohybuje po kružnici s poloměrem $r = 8$ m, úhlovou rychlostí $\omega = 5$ rad·s^{1} a s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 10$ rad·s^{-2}. Určete jeho obvodovou rychlost a normálové zrychlení.
Řešení:
a) Obvodovou rychlost určíme ze vzorce $v = \omega \cdot r$.
Platí $v = 5 \cdot 8 = 40$ m·s^{-1}. Obvodová rychlost má velikost 40 m·s^{-1}.

b) Pro normálové zrychlení platí $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{40^2}{8} = \frac{1600}{8} = 200$ m·s^{-2}.

Velikost normálového zrychlení je 200 m·s^{-2}.

Př. Kotoučová pila se otáčí 20x za sekundu a její průměr je 100 cm. Určete periodu otáčení, úhlovou rychlost a řeznou rychlost pily. Řezná rychlost pily odpovídá rychlosti bodu na obvodu pily.

Řešení:

Frekvence je 20 Hz. Pak periodu určíme ze vztahu $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,\mathrm{s}$.

Pro úhlovou rychlost platí $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6\,\mathrm{rad.s^{-1}}$.

Řezná rychlost pily je určena vztahem $v = \omega r = 125{,}6 \cdot 0{,}5 = 62{,}8$ m·s^{-1}.

Poznámka: Pro určení vztahů mezi úhlovými veličinami při rovnoměrném a rovnoměrně zrychleném (zpomaleném) pohybu můžeme použít známé vztahy. Podívejte se pozorně na odpovídající si vztahy v levém (obvodové veličiny) a v pravém (úhlové veličiny) sloupci. Odpověď naleznete, nahradíte-li s→φ, v→ω a a→ε.

Rovnoměrný pohyb:

$s = vt + s_0$ | $\varphi = \omega t + \varphi_0$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$ | $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$

kde $t_0 = 0\,s$.

Rovnoměrně zrychlený pohyb:

$s = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t + s_0$ | $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

$v = a_t t + v_0$ | $\omega = \varepsilon t + \omega_0$

$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$ | $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$

kde $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, a_t je tečné zrychlení působící změnu velikosti rychlosti.

Rovnoměrně zpomalený pohyb:

$s = -\frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$ | $\varphi = -\frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t$

$v = -a_t t + v_0$ | $\omega = -\varepsilon t + \omega_0$

2.13 Testové otázky

1. *Kinematika se zabývá studiem*

a) pohybu těles v prostoru a čase bez ohledu na příčiny pohybu
b) pouze tvaru a velikosti dráhy pohybujícího se bodu
c) sil, které způsobují pohyb
d) pohybu těles v rovině a silami, které ovlivňují tvar dráhy

2. *Postup při odvození kinematických veličin lze vyjádřit vztahem*

a) $s(t) \to v(t) \to a(t)$ derivování
b) $a(t) \to v(t) \to s(t)$ derivování
c) $s(t) \to v(t) \to a(t)$ integrování
d) $a(t) \to s(t) \to v(t)$ integrování

3. *Podle tvaru dráhy dělíme pohyb bodu na*

a) přímočarý, křivočarý rovinný, křivočarý prostorový
b) přímočarý, kruhový, křivočarý prostorový
c) přímočarý, křivočarý
d) přímočarý, křivočarý rovinný, křivočarý prostorový, obecný

4. *Podle velikosti rychlosti dělíme pohyb bodu na*

a) rovnoměrný, zrychlený, zpomalený
b) rovnoměrný přímočarý, rovnoměrný křivočarý
c) rovnoměrně proměnný, nerovnoměrně proměnný
d) rovnoměrný, rovnoměrně proměnný, nerovnoměrně proměnný

5. *Hodnotu okamžité rychlosti určíme ze vztahu*

a) $v = \Delta s/\Delta t$
b) $v = \lim\limits_{\Delta t \to 1} \Delta s/\Delta t$
c) $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t$
d) neplatí žádná z těchto možností

6. *Pohyb rovnoměrný přímočarý je charakterizován*

a) konstantním (nulovým) zrychlením
b) konstantní rychlostí
c) nulovou rychlostí
d) nenulovým zrychlením

7. *Hmotný bod se pohybuje po dráze, která je vyjádřena rovnicí $s = 3t + 2$. Dráha tohoto bodu na konci páté sekundy je*

a) $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
b) $3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
c) $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
d) $17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

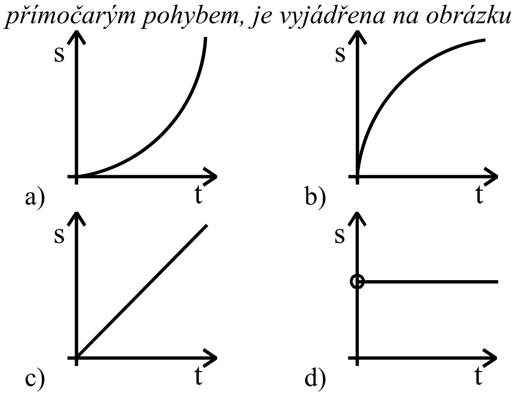
8. *Je-li závislost dráhy těžiště na čase vyjádřena rovnicí $s = 4t + 7$, je velikost počáteční dráhy s_0 rovna*

a) 4 m
b) 7 m
c) 11 m
d) 28 m

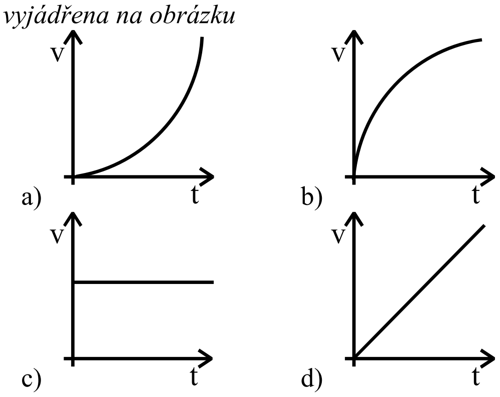
9. *Rychlobruslař snižuje rovnoměrně rychlost tak, že během 5 s dojde k poklesu její velikosti z 12 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ na 6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jeho zrychlení je*

a) $-1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
b) $-0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
c) $-2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
d) $-0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

10. *Grafická závislost dráhy na čase těžiště závodníka, který se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, je vyjádřena na obrázku*



11. *Grafická závislost rychlosti na čase cyklisty, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře, je vyjádřena na obrázku*

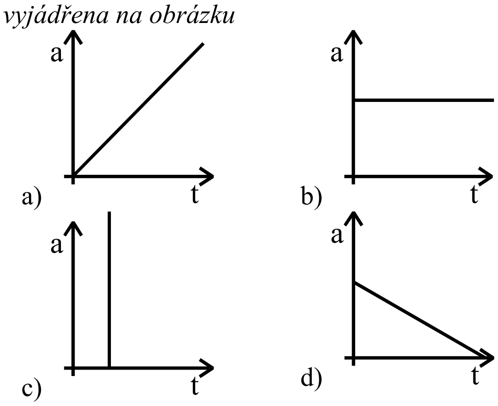


12. *Plavec se pohybuje rychlostí v_p ve směru proudu, jehož rychlost vzhledem k břehům je v_x. V tomto případě urazí plavec dráhu s za dobu*
a) $t = s/v_p$
b) $t = s/v_x$
c) $t = s/(v_p - v_x)$
d) $t = s/(v_p + v_x)$

13. *Při pohybu rovnoměrně zrychleném přímočarém se rychlost pohybu*
a) zmenšuje
b) zvětšuje
c) nemění
d) kolísá

14. *Bobisté a charakter trati po startu způsobí během 8 s rovnoměrné zvýšení rychlosti bobu na 30 $m{\cdot}s^{-1}$. Bob za tuto dobu urazí dráhu*
a) 300 m
b) 240 m
c) 120 m
d) 60 m

15. *Skokan z věže se pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným přímočarým. Funkční závislost zrychlení jeho těla na čase je graficky vyjádřena na obrázku*



16. *Skokan do vody padá volným pádem z výšky 20 m. V tomto případě ($g = 10\ m{\cdot}s^{-2}$, tření a odpor vzduchu zanedbáváme) dopadne do vody za*
a) 1 s
b) 2 s
c) 3 s
d) 4 s

17. *Parašutista padá volným pádem (pohyb rovnoměrně zrychlený). V tomto případě se*
a) mění pouze směr jeho rychlosti
b) mění pouze velikost jeho rychlosti
c) mění směr i velikost jeho rychlosti
d) směr ani velikost rychlosti nemění

18. *Výška výstupu při svislém vrhu závisí na*
a) úhlu odhodu
b) úhlu odhodu a počáteční rychlosti
c) počáteční rychlosti
d) neplatí žádná z těchto možností

19. *Vertikální rychlost míče, který koná svislý vrh vzhůru, je v nejvyšším bodě jeho dráhy*
a) stejná jako počáteční rychlost
b) stejná jako rychlost dopadu
c) maximální
d) neplatí žádná z těchto možností

20. *Basketbalista se při vertikálním skoku odráží počáteční rychlostí $v_0 = 3\ m{\cdot}s^{-1}$. Výška skoku je ($g = 10\ m{\cdot}s^{-2}$)*
a) 40 cm
b) 45 cm
c) 50 cm
d) 55 cm

21. *Délka doletu při vodorovném vrhu závisí na*
a) úhlu odhodu a velikosti počáteční rychlosti
b) úhlu odhodu a výšce odhodu
c) výšce odhodu a velikosti počáteční rychlosti
d) neplatí žádná z těchto možností

22. *Vrh šikmý se skládá z těchto pohybů*
a) pohyb rovnoměrný přímočarý ve směru počáteční rychlosti + volný pád
b) pohyb rovnoměrně proměnný ve směru počáteční rychlosti + volný pád
c) pohyb nerovnoměrně proměnný ve směru počáteční rychlosti + volný pád
d) pohyb rovnoměrný křivočarý ve směru počáteční rychlosti + volný pád

23. *Délka šikmého vrhu ($h \neq 0$) závisí na*
a) velikosti počáteční rychlosti, hmotnosti tělesa
b) velikosti počáteční rychlosti, hmotnosti tělesa, úhlu odhodu
c) velikosti počáteční rychlosti, hmotnosti tělesa, úhlu odhodu a výšce odhodu
d) velikosti počáteční rychlosti, úhlu odhodu, výšce odhodu

24. *Gymnasta provádí na hrazdě prvek, při kterém provede 2,5 veletoče. Velikost úhlu, který opíše jeho těžiště kolem hrazdy, je*
a) 180°
b) 360°
c) 540°
d) 900°

25. *Směr vektoru rychlosti* **v** *při křivočarém pohybu je dán*
a) spojnicí těžiště a středu křivosti
b) normálou ke křivce v daném bodě
c) tečnou ke křivce v daném bodě
d) nelze určit podle předem stanoveného pravidla

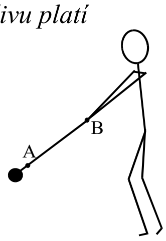
26. *Zrychlení u křivočarých pohybů se rozkládá na*
a) tečné, celkové
b) dostředivé, celkové
c) tečné, dostředivé
d) neplatí žádná z těchto možností

27. *Disk se při otočce pohybuje po kružnici o poloměru $r = 1$ m s konstantní obvodovou rychlostí $v = 10$ m·s^{-1}. Velikost dostředivého zrychlení disku je*
a) 10 m·s^{-2}
b) 50 m·s^{-2}
c) 100 m·s^{-2}
d) 150 m·s^{-2}

28. *Vztah mezi úhlovou rychlostí ω a obvodovou rychlostí v při pohybu po kružnici je dán vzorcem (r je poloměr křivosti)*
a) $\omega = v \cdot r$
b) $v = \omega \cdot r$
c) $v = \omega / r$

29. *Běžec probíhá v hale klopenou zatáčkou o poloměru $r = 24$ m rychlostí $v = 8$ m·s^{-1}. Úhlová rychlost běžce je*
a) 3 rad·s^{-1}
b) 16 rad·s^{-1}
c) 192 rad·s^{-1}
d) 1/3 rad·s^{-1}

30. *Pro rychlost bodů A, B na kladivu platí*
a) obvodová i úhlová rychlost pro oba body je stejná
b) obvodová i úhlová rychlost pro oba body je různá
c) obvodová rychlost obou bodů je různá, úhlová rychlost se neliší



Řešení: 1a, 2a, 3a, 4d, 5c, 6b, 7d, 8b, 9a, 10c, 11c, 12d, 13b, 14c, 15b, 16b, 17b, 18c, 19d, 20b, 21c, 22a, 23d, 24d, 25c, 26c, 27c, 28b, 29d, 30c

3 DYNAMIKA

Na rozdíl od kinematiky, která se zabývá pouze popisem pohybu, si dynamika všímá důvodů a příčin pohybových změn – působících sil.
Příčiny pohybových změn studoval Sir Isaac Newton, který je popsal ve svém díle *Matematické základy přírodních věd*. Závěry je možné shrnout do tří pohybových zákonů, které mají platnost ve všech oblastech fyziky, v mikrosvětě, v makrosvětě i v megasvětě.

Základní příčinou změny pohybu je působící síla $\vec{F}$. Jednotkou síly je newton, $[F] = \mathrm{N}$.

Dosud jsme při řešení problémů neuvažovali význam hmotnosti pohybujících se těles. V dynamice má naopak hmotnost nezastupitelný význam.
Každé těleso libovolného tvaru je charakterizováno veličinou, která se nazývá hmotnost m.
Jednotkou hmotnosti je kilogram, $[m] = \mathrm{kg}$.

Př. Ze zkušenosti víme, že čím má těleso větší hmotnost, tím je obtížnější změnit jeho pohybový stav. Prázdný lehký vozík roztlačíme nebo naopak zastavíme snadno. Stejný vozík, na kterém je naloženo 500 kg materiálu, uvedeme do pohybu nebo zastavíme s určitými problémy. K podobnému závěru bychom došli, kdybychom chtěli změnit směr pohybu tělesa. V případě pohybových aktivit se s touto skutečností setkáváme při kontaktu s protivníkem ve sportovních hrách, ale také při změně pohybového stavu vlastního těla.

Těleso má v závislosti na své hmotnosti menší, či větší schopnost setrvávat ve svém původním stavu. Říkáme, že hmotnost je mírou setrvačných vlastností tělesa.

Pohybový stav těles je určen kromě rychlosti i hmotností. Veličina, která v sobě obě charakteristiky spojuje, se nazývá hybnost $\vec{p}$. Je definovaná vztahem $\vec{p} = m\vec{v}$.
Jednotka hybnosti: $[p] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

Př. Určete hybnost běžce o hmotnosti 70 kg, který běží rychlostí 10 km·hod^{-1}.
Řešení:
Rychlost 10 km·hod^{-1} převedeme na m·s^{-1}. $10 : 3{,}6 = 2{,}78$ m·s^{-1}
$p = m \cdot v = 70 \cdot 2{,}78 = 194{,}6$
Hybnost běžce je 194,6 kg·m·s^{-1}.

3.1 Newtonovy pohybové zákony

3.1.1 Zákon setrvačnosti

Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno vnějšími silami tento pohybový stav změnit (výslednice sil působících na těleso je rovna nule).
V závislosti na rychlosti musí pro rovnoměrný přímočarý pohyb s konstantní rychlostí platit
$\vec{p} = m\vec{v} = \text{konst.}$ $\vec{F} = 0\,\mathrm{N}$
Nemění se velikost ani směr rychlosti a hybnosti.

3.1.2 Zákon síly

Jestliže na těleso působí vnější síla, pak se jeho pohybový stav změní. Síla je úměrná časové změně hybnosti.
Působením síly se změní rychlost, a tím i hybnost tělesa. Změna se může projevit nejen změnou velikosti těchto veličin, ale i změnou směru příslušných veličin.

$\vec{p} = m\vec{v} \neq$ konst. $\qquad \vec{F} \neq 0\,\mathrm{N}$

Platí $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$.

Nejčastěji se tento zápis používá ve zkráceném tvaru $F = m \cdot a$.

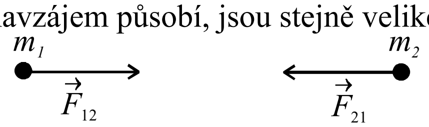
Pokud na těleso působí vnější síla, pak se pohybuje se zrychlením. Síla ve směru rychlosti pohyb zrychlí, síla proti směru rychlosti pohyb zpomalí, síla působící pod určitým úhlem změní trajektorii pohybu.

V závislosti na velikosti síly rozlišujeme pohyb:

a) $F = 0$ N, pak bude zrychlení $a = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \rightarrow$ pohyb je rovnoměrný.
b) $F =$ konst. $\neq 0$ N, pak je zrychlení $a =$ konst. $\neq 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \rightarrow$ pohyb je rovnoměrně proměnný.
c) $F = f(t) \neq$ konst., pak zrychlení $a = f(t) \neq$ konst. $\rightarrow$ pohyb je nerovnoměrně proměnný.

3.1.3 Zákon akce a reakce

Síly, kterými na sebe tělesa navzájem působí, jsou stejně veliké opačně orientované.



Tyto síly se ve svých účincích neruší, protože každá z nich působí na jiné těleso.

Protože síly akce a reakce vznikají a zanikají současně, působí tělesa na sebe navzájem po stejnou dobu. Během jejich vzájemného silového působení dochází ke změně hybností jednotlivých těles.

Př. Působení zákonu akce a reakce je základem pro provedení odrazu. Jestliže zatlačíme do podložky určitou silou, potom podložka působí na naše tělo stejně velkou opačně orientovanou silou. Tato síla uvede naše tělo do pohybu. Opakujeme-i tuto činnost, dochází k lokomoci – chůze, běh.

Ze zákonu akce a reakce vyplývá zákon zachování hybnosti:
Součet hybností těles v izolované soustavě je konstantní

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_\mathrm{n} = \mathrm{konst.}$

Př. Těleso, na které působí konstantní síla 0,02 N, urazí během prvních čtyř sekund dráhu 3,2 m. Jak velká je hmotnost tělesa a jak velkou získá rychlost, bylo-li původně v klidu?
Řešení:

a) Síla je konstantní, těleso se tedy pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem.

Platí $F = m\,a$, $s = \frac{1}{2} a\,t^2$, $v = a\,t$.

Ze vztahu pro dráhu vyjádříme zrychlení a dosadíme do upraveného vztahu pro sílu.

$a = \frac{2\,s}{t^2}$, $m = \frac{F}{a} = \frac{F\,t^2}{2\,s} = \frac{0{,}02 \cdot 16}{2 \cdot 3{,}2} = 0{,}05\,\mathrm{kg}$

Hmotnost tělesa je 0,05 kg.

b) Rychlost určíme dosazením za zrychlení

$v = a\,t = \frac{2\,s}{t^2}\,t = \frac{2\,s}{t} = \frac{2 \cdot 3{,}2}{4} = 1{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Rychlost tělesa je 1,6 m·s^{-1}.

3.2 Druhy sil

3.2.1 Síly při pohybu po kružnici

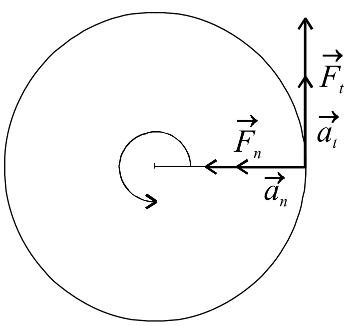
Podle Newtonova zákonu síly platí $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Aby se těleso pohybovalo se zrychlením, pak ve stejném směru musí působit příslušná síla.

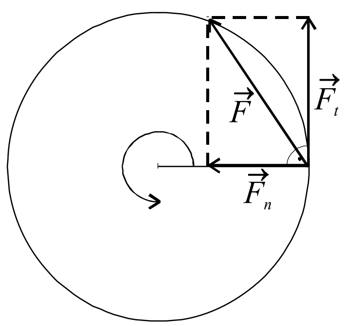
Ve směru normálového (dostředivého) zrychlení $\vec{a}_n$ působí normálová (dostředivá) síla $F_n = m\,a_n = m\frac{v^2}{r}$.

Ve směru tangenciálního (tečného) zrychlení $\vec{a}_t$ působí tangenciální (tečná) síla $F_t = m\,a_t = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$, obecně $F_t = m\,a_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Normálová síla působí kolmo ke směru pohybu a mění směr pohybu (mění trajektorii).
Tangenciální síla působí ve směru pohybu a pohyb urychluje nebo zpomaluje – mění velikost rychlosti.

Obě síly jsou na sebe kolmé. Jejich složením (vektorové veličiny) $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$ získáme výslednou sílu.





Velikost výsledné síly stanovíme výpočtem podle Pythagorovy věty. Pak $F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2}$.

Př. Kulička o hmotnosti 2 g se otáčí na niti délky 0,5 m v horizontální rovině tak, že velikost tečného zrychlení je 6 m·s^{-2}, velikost okamžitého dostředivého zrychlení je 288 m·s^{-2}. Určete celkovou sílu, která na ni působí.
Řešení:
Velikost normálové síly určíme ze vztahu $F_n = ma_n = 0{,}002 \cdot 288 = 0{,}576$ N.
Velikost tečné síly určíme ze vztahu $F_t = ma_t = 0{,}002 \cdot 6 = 0{,}012$ N.
Pro velikost výsledné síly platí

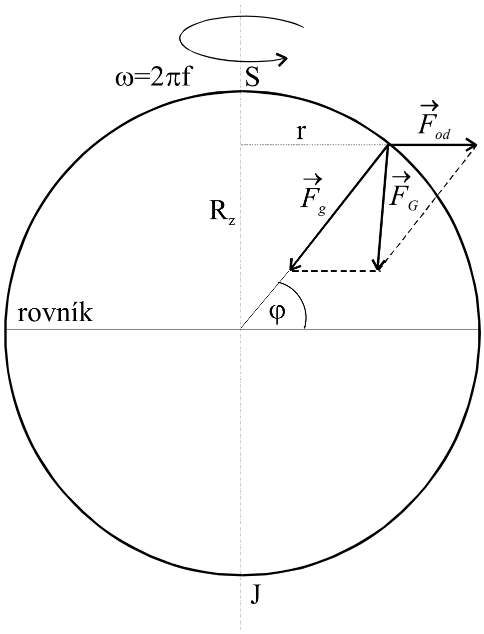
$$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{0{,}576^2 + 0{,}012^2} = \sqrt{0{,}3318 + 0{,}000144} = \sqrt{0{,}33194} = 0{,}5761\text{N}$$

Velikost výsledné síly je 0,5671 N.

3.2.2 Síla tíhová

Jednou ze sil, se kterými se setkáváme v běžném každodenním životě, je síla tíhová $\vec{F}_G$ nebo $\vec{G}$, působící v tíhovém poli Země na každé hmotné těleso.

Vznikne vektorovým složením síly gravitační $F_g = \kappa \dfrac{M_Z m}{R_Z^2}$, která je orientovaná do středu Země, a síly odstředivé $F_{od} = m\dfrac{v^2}{r}$. Síla odstředivá souvisí s otáčením Země kolem osy a je kolmá k ose rotace. Vektor tíhové síly získáme složením vektoru síly gravitační a odstředivé $\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}$.
Velikost tíhové síly závisí na zeměpisné šířce φ.



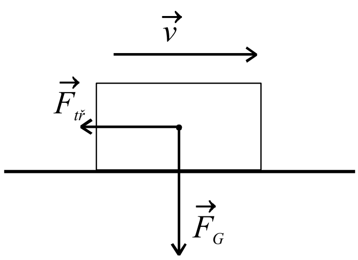
Ve směru příslušných sil jsou orientovaná zrychlení gravitační $a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$, odstředivé $a_{od} = \frac{v^2}{r}$, kde m je hmotnost tělesa, M_Z je hmotnost Země, R_Z je poloměr Země, r je vzdálenost tělesa od osy rotace, $\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} je gravitační konstanta.

Vektorovým složením gravitačního a odstředivého zrychlení dostaneme zrychlení tíhové g (jeho hodnota v naší zeměpisné šířce je g = 9,81 m·s^{-2}).
Pak tíhová síla je $\vec{F}_G = m\,\vec{g}$.
Tato síla je orientovaná mimo zemský střed, její směr považujeme za svislý. Způsobuje volný pád těles.

Př. Předpokládejme, že na libovolném místě zemského povrchu existují stejné klimatické podmínky. Na které zeměpisné šířce je nejvýhodnější provedení pohybu, aby dosažený výkon byl nejlepší? Na rovníku, protože zde působí odstředivá síla proti působení gravitační síly.

3.2.3 Síly tření

Třecí síly jsou důsledkem tření, které vzniká při pohybu tělesa po povrchu jiného tělesa. Třecí síla $\vec{F}_{tř}\ (\vec{T})$ působí proti směru pohybu tělesa. Podle charakteru dotyku těles a jejich relativního pohybu hovoříme o smykovém tření nebo valivém tření.
Příčinou smykového tření je skutečnost, že styčné plochy dvou těles nejsou nikdy dokonale hladké, jejich nerovnosti do sebe zapadají a brání vzájemnému pohybu těles. Přitom se uplatňuje i silové působení částic v dotykových plochách. Tyto vlivy jsou charakterizovány koeficientem smykového tření v pohybu f (někdy také značíme μ).
Velikost třecí síly závisí na koeficientu smykového tření f a na síle kolmé k podložce – normálové síle – N. Určíme ji podle vztahu $F_{tř} = f\,N$.
Pokud se těleso pohybuje po vodorovné rovině, pak je touto normálovou silou tíhová síla $\vec{F}_G$.
Síla smykového tření je určena vztahem $F_{tř} = f\,F_G$.



Koeficient smykového tření (bezrozměrná veličina) v pohybu:

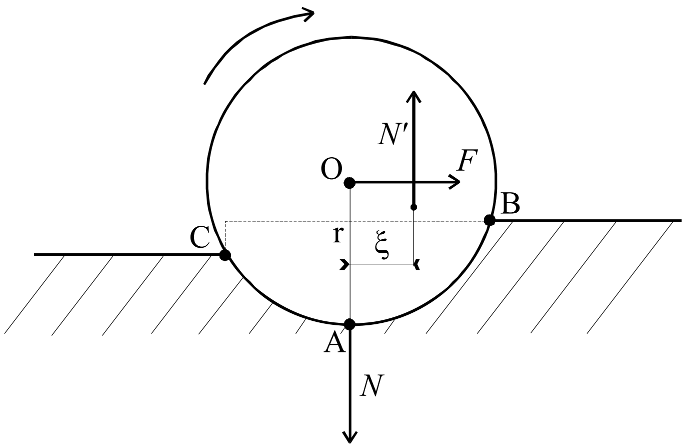
dřevo na dřevě	0,25–0,5
dřevo na kovu	0,2–0,6
kov na kovu	0,15–0,25

Koeficient smykového tření je větší než u tření valivého.

Př. Určete koeficient smykového tření mezi pukem a ledem, jestliže v okamžiku úderu získá puk rychlost 10 m·s^{-1} a zastaví se působením tření za 8 s.
Řešení:
Základní vztah pro třecí sílu je $F_{tř} = f\,F_G$. Nejdříve musíme určit zpomalení pohybu ze vztahu $v = -at + v_0$, $a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{10-0}{8} = 1{,}25$ m·s^{-2}.
Dojde-li k zastavení puku, pak $F = F_{tř} \Rightarrow ma = fmg \Rightarrow f = \frac{a}{g} = \frac{1{,}25}{10} = 0{,}125.$
Koeficient smykového tření má hodnotu 0,125.

Př. Tření nelze chápat jako sílu, která má vždy negativní vliv na provedení pohybu. Bez přítomnosti tření by došlo při odrazu k podklouznutí. Lokomoci by nešlo realizovat.

Valivé tření je vyvoláno silou, která působí proti směru pohybu při pohybu valivém. Jestliže budeme uvažovat např. kolo o poloměru r, můžeme stanovit sílu, kterou je nutné působit, aby se kolo pohybovalo rovnoměrným pohybem.



Kolo tlačí na rovinu kolmou silou N. Tím způsobí stlačení roviny. Deformovaná rovina naopak působí stejně velkou silou opačně orientovanou na kolo ve vzdálenosti ξ před osou kola. Síla N a její reakce N' tvoří dvojici sil s momentem $M = N\xi$. Aby se kolo otáčelo rovnoměrným pohybem, je nutné vyvolat stejně velký otáčivý moment ve směru pohybu $M = F\,r$. Síla F překonávající valivé tření je určeno vztahem $F = \xi \frac{N}{r}$

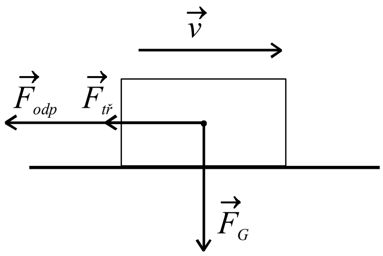
Tato síla je zároveň svou velikostí rovna síle valivého tření $F_{třv}$; ξ se nazývá koeficient valivého tření, $[\xi] = m$.

Koeficient valivého tření je mnohem menší než součinitel smykového tření:

valení ocelové kuličky na ocelových kroužcích	0,001–0,005 mm
gumová kola na válcované silnici	0,025 mm
železniční kolo na kolejnici	0,002 mm

3.2.4 Síly odporové

Při pohybu tělesa v prostředí, např. ve vzduchu nebo v kapalině (tekutině), musí těleso překonávat odpor prostředí. Při relativním pohybu tělesa a tekutiny dochází k přemisťování částic prostředí, uplatňují se třecí síly. Tento jev se nazývá odpor prostředí.
Odporová síla vzniká při vzájemném pohybu a působí proti směru pohybu. Je úměrná velikosti rychlosti tělesa vzhledem k prostředí.



Při větších rychlostech je odporová síla úměrná druhé mocnině rychlosti.

Platí vztah $F_{odp} = CS_{odp}\frac{1}{2}\rho v^2$, kde

C je součinitel odporu prostředí (závisí na tvaru tělesa), S_{odp} je průřez tělesa kolmý ke směru pohybu, ρ je hustota prostředí, v je relativní rychlost.

Další silou vnějšího prostředí, která se uplatňuje při pohybu tělesa (ve vzduchu nebo v kapalině), je aerodynamická (hydrodynamická) vztlaková síla. Její účinky na lidské tělo, zejména při pohybu ve vzduchu, jsou zpravidla menší, než u odporové síly. I když existují pohyby (např. skok na lyžích), kde má tato síla dominantní úlohu.
Vektor síly je kolmý na vektor odporu prostředí. To znamená, že směr nemusí vždy směřovat vertikálně vzhůru.
Při odvození vztahu pro vztlakovou sílu postupujeme obdobně jako pro odpor prostředí.

Velikost síly určíme ze vztahu $F_{vzt} = CS_{vzt}\frac{1}{2}\rho v^2$,

kde C je součinitel odporu (závisí na tvaru tělesa), S_{vzt} je průřez tělesa ve směru pohybu, ρ je hustota prostředí, v je relativní rychlost.

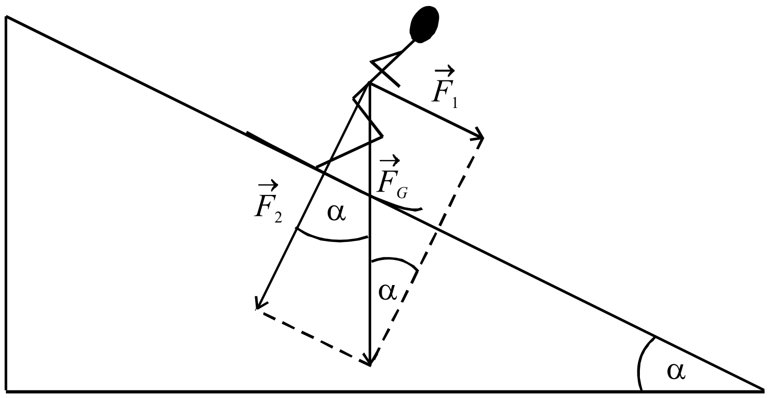
Př. Působení odporové a vztlakové síly se uplatňuje v mnoha sportovních disciplínách. Zatímco např. ve sjezdovém lyžování nebo v plavání je tendencí závodníků odpor prostředí minimalizovat, ve skoku na lyžích záleží na tom, ve které části letové křivky se skokan nachází. Ve závěrečné části letu a ve fázi přípravy na dopad je výhodné zvýšení odporové síly.

Př. Určete koeficient odporu prostředí, jestliže parašutista dopadne na zem konstantní rychlostí 4 $m \cdot s^{-1}$. Hmotnost parašutisty je 80 kg.
Řešení:
Odporová síla roste v závislosti na rychlosti. Po určité době dojde k vyrovnání síly tíhové a odporové a pohyb je rovnoměrný.
$F_{odp} = F_G \Rightarrow Rv = mg \Rightarrow R = \frac{mg}{v} = \frac{80 \cdot 10}{4} = \frac{800}{4} = 200$ $kg \cdot s^{-1}$
Koeficient odporu prostředí je 200 $kg \cdot s^{-1}$.

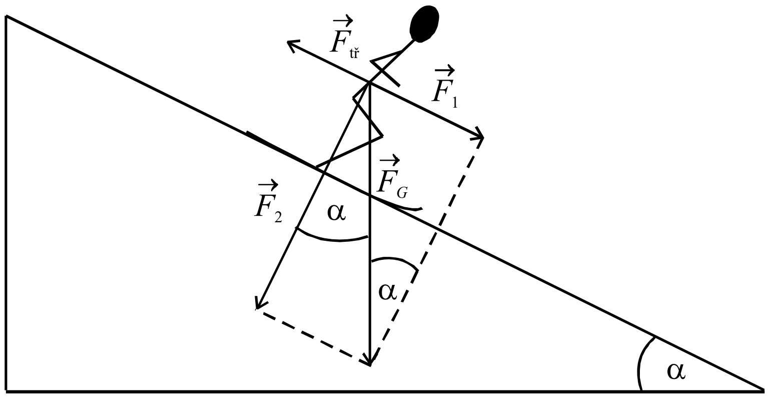
3.2.5 Síly při pohybu po nakloněné rovině

Budeme-li uvažovat libovolné těleso (např. lyžaře) na nakloněné rovině s úhlem náklonu α, bude se pohybovat smykovým pohybem vlivem vlastní tíhové síly $\vec{F}_G$, která je orientovaná svisle dolů. Tíhovou sílu jako vektor rozložíme do dvou navzájem kolmých složek. Jedna složka $(\vec{F}_1)$ je orientovaná ve směru pohybu, druhá $(\vec{F}_2)$ je kolmá ke směru pohybu, tzn., že je kolmá k nakloněné rovině.

Jejich velikosti určíme z pravoúhlého trojúhelníku s využitím funkcí sinus a cosinus takto:
$F_1 = F_G \sin\alpha = mg \sin\alpha$, $F_2 = F_G \cos\alpha = mg \cos\alpha$.



Složka $\vec{F}_2$ ovlivňuje velikost třecí síly $F_{tř} = f\,N = f\,F_2$.
Třecí síla $F_{tř} = f\,F_G \cos\alpha = f\,mg \cos\alpha$ je orientovaná proti pohybu.



Síly $\vec{F}_1, \vec{F}_{tř}$ jsou opačně orientované, jejich výslednice je rovna jejich rozdílu.
1. V případě, že $F_{tř} > F_1$, zůstane těleso v klidu.
2. Jestliže $F_{tř} < F_1$ je výslednice rovna $F = F_1 - F_{tř} = mg \sin\alpha - f\,mg \cos\alpha$. Těleso se pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným.
3. Pokud platí, že $F_{tř} = F_1$, je výslednice sil nulová. Těleso se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem.

Koeficient smykového tření je roven $f = \mathrm{tg}\,\alpha$.

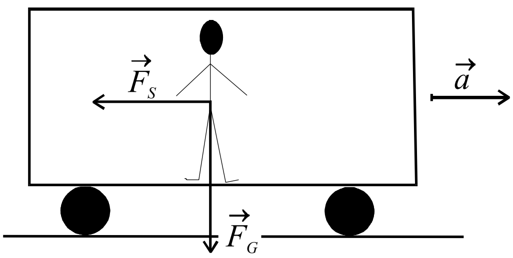
Př. Lyžař o hmotnosti 50 kg se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem na svahu se sklonem 30°. Určete velikost smykového tření mezi lyžemi a sněhem (odpor prostředí zanedbáváme).
Řešení:
Velikost koeficientu smykového tření určíme ze vztahu $f = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.2.6 Síly setrvačné

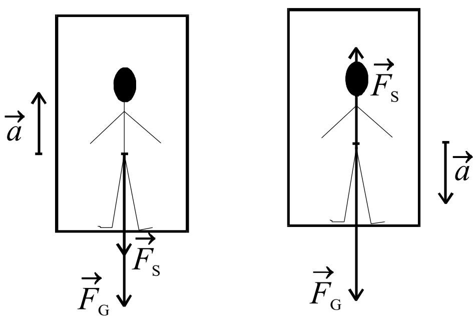
Platnost Newtonových zákonů je omezena na inerciální vztažné soustavy. Jsou to všechny soustavy, které se pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem.
Neinerciální vztažné soustavy jsou všechny soustavy, které se pohybují se zrychlením.

V těchto soustavách Newtonovy zákony neplatí. Projevují se zde setrvačné síly.
Setrvačné síly jsou vždy orientované proti směru zrychlení soustavy.

Setkáváme se s nimi v běžném životě při změně rychlosti pohybu (rozjíždění, brždění) soustav.
Klasickým případem je např. rozjíždějící se tramvaj. Zatímco tramvaj se rozjíždí (brzdí) se zrychlením $\vec{a}$, všechny objekty v tramvaji se pohybují směrem dozadu (dopředu) vlivem působení setrvačné síly $\vec{F}_S = m\,\vec{a}$, kde m je hmotnost tělesa, $\vec{a}$ je zrychlení soustavy.
Tělesa jsou uvedena do pohybu bez působení vnější síly.



Podobný případ nastane v rozjíždějícím se nebo brzdím výtahu. Při rozjezdu nahoru působí na osazenstvo kromě tíhové síly ještě síla setrvačná. Celková síla, která působí na člověka, bude rovna součtu obou sil $F = F_G + F_S$.
Při rozjíždění výtahu směrem dolů je setrvačná síla orientovaná směrem vzhůru. Výsledná síla, která působí na člověka, je rovna rozdílu $F = F_G - F_S$.

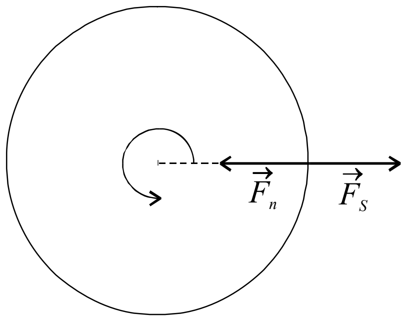


Př. Dokážete určit, jak se výše uvedené působení setrvačné síly projeví na vašich pocitech při jízdě ve výtahu? Při rozjíždění výtahu směrem vzhůru máme pocit, že na nás působí síla, která nás tlačí směrem dolů. Při zastavování výtahu při jízdě směrem vzhůru máme pocit, že na naše tělo působí síla, která nás nadlehčuje.

Setrvačné síly se projevují rovněž v soustavách, které se pohybují křivočarým pohybem. Normálové (dostředivé) zrychlení mění směr rychlosti a je orientováno do středu křivosti. Setrvačná síla je v tomto případě orientovaná opačným směrem.

Typickým případem je pohyb po kružnici.
Setrvačná síla má stejnou velikost jako síla normálová (dostředivá).
Nazýváme ji silou odstředivou.

$$F_S = m\,a_n = m\frac{v^2}{r}$$



Př. Jaká odstředivá síla působí na cyklistu hmotnosti 75 kg, který projíždí zatáčkou o poloměru křivosti 20 m rychlostí 10 m·s^{-1}?
Řešení:

Odstředivou sílu určíme ze vztahu $F_{od} = m\frac{v^2}{r}$. Po dosazení je $F_{od} = 75\cdot\frac{10^2}{20} = 375$ N.

Velikost odstředivé síly je 375 N.

Př. Cyklista vjíždí do zatáčky. Jakým způsobem reaguje na změnu v působení sil a na čem závisí velikost jeho reakce? Cyklista se při průjezdu zatáčkou nakloní směrem „do zatáčky“. Velikost náklonu závisí na jeho hmotnosti, rychlosti jízdy a na poloměru zatáčky.

3.2.7 Síly pružnosti

V předchozích oddílech byly uvažovány vnější síly, které měnily pohybový stav těles. Tělesa byla dokonale tuhá a neměnila účinkem vnějších sil svůj tvar.
Ve skutečnosti se tělesa účinkem vnějších sil zároveň deformují. V tělesech naopak vznikají síly, které deformaci brání.

Působením vnějších tahových sil dochází ke zvětšování vzdálenosti mezi jednotlivými částicemi tělesa. Proto ve vzájemném působení částic převládají přitažlivé síly, které nazýváme silami pružnosti $\vec{F}_p$. Jsou úměrné prodloužení nebo naopak zkrácení tělesa a můžeme je zapsat ve tvaru $F_p = -k\,y$, kde k je konstanta pružnosti materiálu, y je velikost prodloužení. Vzniklé síly pružnosti brání vnějšímu silovému působení.

V libovolném řezu tělesa o ploše S vzniká při deformaci vlivem působení vnější síly $\vec{F}$ stav napjatosti, který posuzujeme pomocí veličiny napětí σ.

Platí $\sigma = \dfrac{\Delta F}{\Delta S}$.

Jednotkou napětí je pascal, $[\sigma]$ = Pa = N·m^{-2}.

Působí-li síla na plochu kolmo, hovoříme o normálovém napětí. Pak jde o deformaci v tahu nebo tlaku. Působí-li deformace v ploše, hovoříme o napětí tečném, které způsobuje deformaci ve smyku.

Protože lidské tělo není dokonale tuhé těleso, uplatňují se deformace při působení síly na segmenty a tkáně. Tyto vlastnosti jsou obtížně měřitelné, ale mají často rozhodující význam pro způsob provedení pohybu i pro velikost zatížení pohybového systému. Protože se při namáhání mění struktura látek, mění se i vlastnosti těles. Dochází k „únavě“ materiálu (únavová zlomenina).

Při mechanickém namáhání (v tahu) tělesa délky l_0 na průřezu S normálovou silou F tahu je výsledná délka $l = l_0 + \Delta l$, kde Δl je absolutní prodloužení (deformace).

Při porovnání různých vzorků (různé délky) není výpovědní hodnota absolutního prodloužení nejvýhodnější, proto zavádíme veličinu relativní prodloužení (bezrozměrná) $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$.

Po úpravě je $\varepsilon = \dfrac{1}{E}\sigma$, kde E je Youngův modul pružnosti.

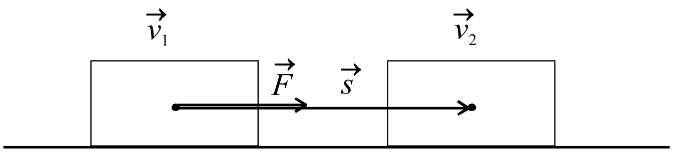
Uvedené vztahy jsou vyjádřením Hookova zákona: Relativní prodloužení je úměrné napětí v tahu (tlaku).

3.3 Časový účinek síly

3.3.1 Impuls síly, hybnost hmoty

Impuls síly představuje časový účinek síly.

Jestliže na těleso o hmotnosti m působí vnější síla $\vec{F}$, pak se její účinek projeví změnou pohybového stavu tělesa, tzn. změnou rychlosti. Zároveň se změní i hybnost tělesa, která je určena vztahem $\vec{p} = m\vec{v}$.

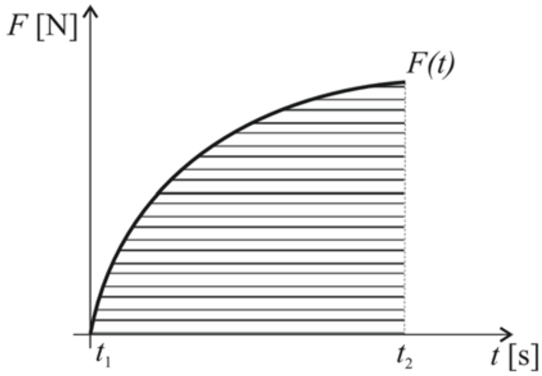


V časovém okamžiku t_1 má těleso hybnost $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, v časovém okamžiku t_2 má těleso hybnost $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$.

Uvažujeme-li pohybovou rovnici $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, pak po úpravě vyplývá, že impuls síly je roven součinu síly a velikosti časového intervalu.

Celkový impuls síly je pak určen vztahem $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$. Zjednodušeně, při působení konstantní síly platí vztah $I = F \cdot \Delta t$.
Velikost silového impulsu odpovídá změně hybnosti tělesa $I = \Delta p$.
Jednotkou impulsu síly: $[I] = \mathrm{N{\cdot}s}$.

Na základě matematické analýzy je zřejmé, že impuls síly je roven obsahu plochy pod křivkou určenou funkční závislostí síly na čase.



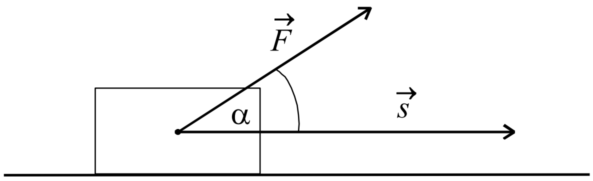
Př. Určete impuls, který udělí síla tělesu o hmotnosti 5 kg, jestliže se jeho rychlost zvětší z hodnoty 10 m.s^{-1} na 15 m.s^{-1}.
Řešení:
$I = \Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = 5{\cdot}15 - 5{\cdot}10 = 25$ N·s.
Velikost silového impulsu je 25 N·s.

Př. Jestliže při odrazu „tlačíme" svalovou silou do podložky, vzniká reakční síla, která působí na naše tělo. Působením síly po určitou dobu vzniká impuls síly, který způsobí změnu hybnosti našeho těla. Změně hybnosti odpovídá změna rychlosti, kterou se tělo po odrazu začíná pohybovat.

3.4 Dráhový účinek síly

3.4.1 Mechanická práce

Slovo práce se v běžném životě užívá v mnoha významech. Hovoříme např. o tělesné práci, o duševní práci; říkáme, že máme mnoho práce apod.
Ve fyzice má však veličina práce přesně stanovený význam. Definici práce v podobě, jak ji používáme dnes, zavedl do fyziky francouzský matematik J. V. Poncelet (1788–1867).
Mechanická práce W je dráhový účinek síly.
Práce je skalární veličina. Jednotkou práce je joule, $[W] = \mathrm{J}$.
Posune-li síla těleso po určité dráze, pak vykoná práci.
Tato síla může být konstantní nebo proměnná, může působit ve směru posunutí nebo pod určitým úhlem (ten se rovněž může měnit).

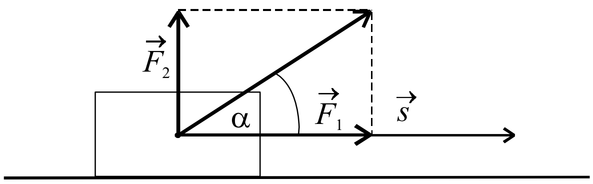


Pokud síla působí pod úhlem α, vzhledem ke směru pohybu, pak ji rozložíme do dvou navzájem kolmých složek $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Složka $\vec{F}_1$ posunuje těleso a tedy vykonává práci. Její velikost určíme pomocí goniometrické funkce kosinus $\Rightarrow$ $F_1 = F\cos\alpha$.

Složka $\vec{F}_2$ je orientovaná vzhůru a těleso nadlehčuje, ovlivňuje třecí sílu. Její velikost určíme vztahem $F_2 = F\sin\alpha$.

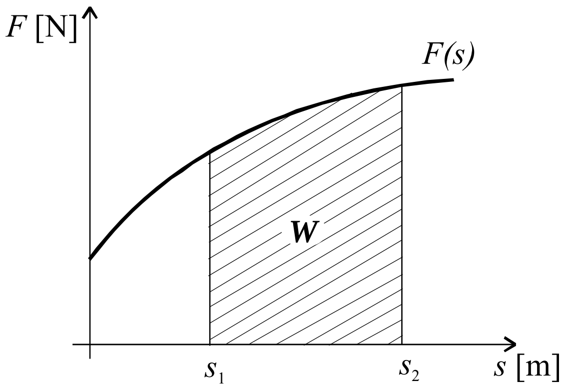
Př. Jestliže táhneme těleso (např. saně), potom tažnou sílu využijeme maximálně pouze tehdy, je-li vektor síly (provázek) rovnoběžný s podložkou. Tato situace zpravidla nenastává. Ve většině případů působí síla šikmo vzhůru. Potom se na tažení využije pouze část této síly a další část síly těleso nadzvedává (při kratším provázku se tato složka síly zvětšuje).



V případě, že je síla $\vec{F} = \text{konst.}$, pak platí $W = F_1 \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, působí-li navíc tato síla ve směru pohybu tělesa ($\alpha = 0°$), potom platí $W = F \cdot s$.

Za předpokladu, že síla $\vec{F} \neq \text{konst.}$, musíme pro určení práce použít infinitezimální počet (určitý integrál).

Vykonaná práce je rovna obsahu obrazce pod křivkou, která vyjadřuje funkční závislost síly na dráze.



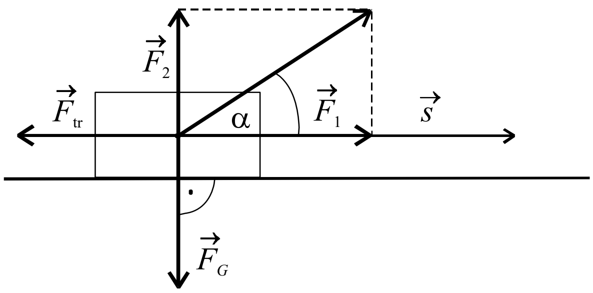
Př. Na těleso, které se nachází v klidu, začne působit síla F = 15 N ve směru pohybu a posune ho do vzdálenosti 8 m. Určete velikost vykonané práce.

Řešení:

Síla svírá se směrem pohybu úhel 0°, pak $\cos 0° = 1$.

$W = F \cdot s = 15 \cdot 8 = 120$ J
Velikost vykonané práce je 120 J.

Př. Určete práci vykonanou silou o velikosti 120 N, která působí na těleso hmotnosti 10 kg pod úhlem 60° a posune ho po dráze 6 m. Koeficient smykového tření je 0,2 (g = 10 m.s^{-2}).
Řešení:
Sílu $\vec{F}$ rozložíme na složky a určíme jejich velikost $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$.
Složka směřující vzhůru ovlivňuje tření.
Pak třecí síla je $F_{tř} = f\,N = f(F_G - F_2) = f\,(m\,g - F\sin\alpha)$.
Výslednice sil $F_v = F_1 - F_{tř} = F\cos\alpha - f\,(m\,g - F\sin\alpha)$ posune těleso po dráze s a vykoná práci $W = F_v s = [F\cos\alpha - f\,(m\,g - F\sin\alpha)]s$.



Po dosazení je

$$W = 120 \cdot \cos 60° - 0{,}2(10 \cdot 10 - 120 \cdot \sin 60°) \cdot 6 = 120 \cdot \frac{1}{2} - 0{,}2\left(100 - 120 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)6 =$$

$$= 455{,}7\,J$$

Velikost vykonané práce je 455,7 J.

3.4.2 Výkon

Výkon je časové zhodnocení vykonané práce (množství práce vykonané za daný čas).
Jednotkou výkonu je watt, [P] = W. Jednotka byla nazvaná na počest anglického vynálezce parního stroje Jamese Watta (1736–1819). Výkon je skalární veličina.
Rozlišujeme výkon
a) *průměrný* – sledujeme celkovou práci vykonanou za celkový čas.

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

b) *okamžitý* – určíme jako práci vykonanou v daném časovém okamžiku.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Při určitém zjednodušení platí: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot v$.

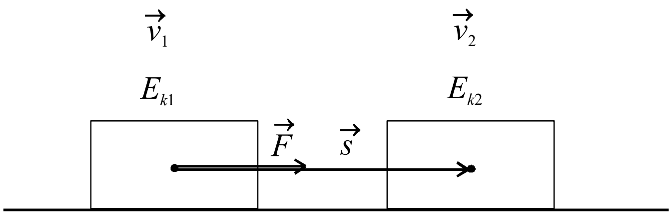
3.4.3 Mechanická energie

Energie je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru schopnosti tělesa konat práci.
Mechanická energie je schopnost konat mechanickou práci.

Jednotkou energie je joule, $[E]$ = J. Energie je skalární veličina.

3.4.4 Kinetická energie

Kinetická energie E_k pohybujícího se tělesa se rovná práci, která je potřebná k jeho uvedení z klidu do pohybového stavu s rychlostí v. Pokud se těleso pohybovalo rychlostí v_1 a pod vlivem působící síly se rychlost změnila na hodnotu v_2, pak je tato práce rovna změně kinetické energie ΔE_k tělesa.



Kinetickou energii E_k tělesa o hmotnosti m, které se pohybuje rychlostí v, určíme podle vztahu

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}mv^2}.$$

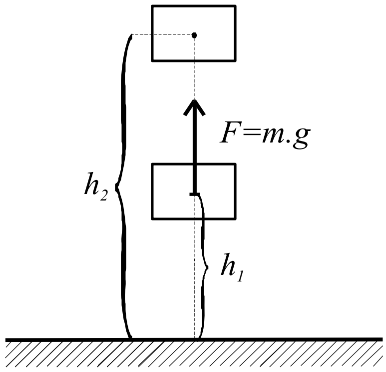
Se zvětšující se rychlostí tělesa kinetická energie roste, při poklesu rychlosti kinetická energie klesá.

Př. Vlak o hmotnosti $8 \cdot 10^5$ kg zvětšil svou rychlost z 10 m·s^{-1} na 15 m·s^{-1}. Určete práci, kterou vykonala tažná síla motoru.
Řešení:
Velikost vykonané práce $W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$.
Po dosazení dostaneme
$W = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^5(15^2 - 10^2) = 4 \cdot 10^5 \cdot (225 - 100) = 4 \cdot 10^5 \cdot 125 = 500 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^7$.
Vlak vykonal práci $5 \cdot 10^7$ J.

3.4.5 Potenciální energie

Potenciální energie závisí na vzájemné poloze dvou těles a na druhu síly, která jejich polohu ovlivňuje.
Podle toho rozeznáváme potenciální energii tíhovou (F_G), gravitační (F_g), elektrostatickou (F_e), pružnosti (F_p).

Jestliže zvedáme těleso o hmotnosti m z výšky h_1 do výšky h_2 silou o velikosti tíhové síly $F_G = m g$, ale opačně orientovanou, vykonáme nad povrchem Země práci.



Potenciální energii tíhovou E_p tělesa hmotnosti m ve výšce h nad povrchem Země vyjádříme podle vztahu $E_p = m \cdot g \cdot h$.
Jestliže těleso stoupá, potenciální energie tíhová roste. Pokud těleso klesá, potenciální energie tíhová se zmenšuje.

Př. Určete práci, kterou vykoná jeřáb, zvedající břemeno o hmotnosti 500 kg z výšky 2 m do výšky 10 m nad povrchem Země (tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$).
Řešení:
Práce se rovná změně potenciální energie tíhové, pak
$W = \Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = m\,g\,h_2 - m\,g\,h_1 = m\,g\,(h_2 - h_1) = 500 \cdot 10 \cdot (10 - 2) = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$.
Jeřáb vykoná práci $4 \cdot 10^4$ J.

Př. Těleso hmotnosti 2 kg padá z výšky 40 m volným pádem v tíhovém poli Země (tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$).
Určete potenciální energii tíhovou E_p a kinetickou energii E_k:
a) na začátku pohybu,
b) ve druhé sekundě pohybu.
Řešení:
a) Potenciální energii tíhovou určíme vzhledem k Zemi podle vztahu
$E_{p_0} = m\,g\,h = 2 \cdot 10 \cdot 40 = 800\ \mathrm{J}$.
Rychlost na začátku pohybu je nulová, pak kinetická energie $E_{k_0} = 0\ \mathrm{J}$.
Celková energie je $E = E_{k_0} + E_{p_0} = 0 + 800 = 800\ \mathrm{J}$.
Na začátku pohybu je velikost potenciální energie 800 J, kinetická energie je nulová.

b) Těleso padá volným pádem. Během dvou sekund urazí těleso volným pádem dráhu $s_2 = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 20\ m \cdot s^{-1}$.
Okamžitá výška nad povrchem Země pak je $h_2 = h - s_2 = 40 - 20 = 20\mathrm{m}$.
Potenciální energie je $E_{p_2} = m\,g\,h_2 = 2 \cdot 10 \cdot 20 = 400\ \mathrm{J}$.
Rychlost vzroste na hodnotu $v_2 = g \cdot t_2 = 10 \cdot 2 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Kinetická energie je
$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m\, v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2 = 400\ \mathrm{J}.$$
Celková energie je $E = E_{p2} + E_{k2} = 400 + 400 = 800$ J.
Po dvou sekundách pádu je hodnota potenciální i kinetické energie rovna 400 J.

Z příkladu vidíme, že v izolované soustavě těles (tam, kde nepůsobí vnější síly) je celková mechanická energie konstantní.
Přírůstek kinetické energie se rovná úbytku energie potenciální $\Delta E_k = -\Delta E_p$.
Součet kinetické energie a potenciální je konstantní.
$E = E_k + E_p =$ konst.

Tento zápis vyjadřuje zákon zachování energie.
Platí v neodporujícím prostředí. V odporujícím prostředí se část mechanické energie přeměňuje vlivem tření v energii tepelnou.

3.5 Tuhé těleso

Reálná tělesa pevného skupenství jsou uspořádané soubory částic (atomů, molekul, iontů), které jsou vázány působením vnitřních sil. Vnitřní síly nemají vliv na pohybový stav tělesa. Změnu pohybového stavu mohou způsobit pouze síly vnější. Tyto síly mohou navíc způsobit i deformaci tělesa.
Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar a objem se nemění účinkem vnějších sil. Zavádíme ho jako abstraktní pojem, který zjednoduší řešený problém.

Př. Zavedení pojmu tuhé těleso má význam u těch problémů, kdy na řešení úlohy má vliv tvar tělesa a rozložení hmoty v tělese. Tento vliv se projevuje především u rotačních pohybů.

3.5.1 Těžiště, hmotný střed

Pojmy těžiště a hmotný střed mají stejný význam. Je to bod, do kterého je umístěno působiště výslednice všech sil, které na těleso působí. Pokud na objekt působí pouze tíhová síla F_G, pak je tento bod působištěm tíhové síly.
Označení hmotný střed používáme u soustavy izolovaných bodů, které jsou v určitém vzájemném vztahu (např. ionty v modelu krystalu). Při řešení souřadnic hmotného středu je vhodné umístit objekt do soustavy souřadných os tak, aby bylo jednoduché určit souřadnice jednotlivých bodů (segmentů).
Označení těžiště používáme u spojitého kontinua (tělesa), které je tvořeno mnoha body.
V praxi jsou pojmy hmotného středu a těžiště ztotožňovány.

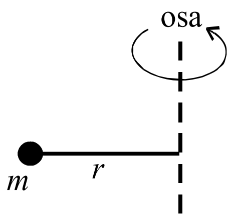
Př. Určení těžiště má velký význam také při řešení úloh, zabývajících se pohybem lidského těla. Metody pro určení těžiště těla se vyznačují různým stupněm zjednodušení, ke kterému musíme přihlížet při interpretaci výsledků. Více poznatků naleznete v publikacích zabývajících se biomechanikou pohybového systému nebo biomechanikou sportu.

3.5.2 Moment setrvačnosti

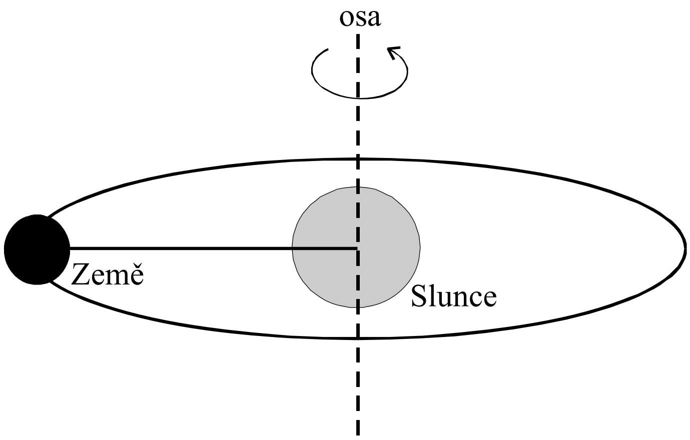
Moment setrvačnosti J charakterizuje těleso při rotačním pohybu. Závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení.
Jednotka momentu setrvačnosti: $[J] = \mathrm{kg \cdot m^2}$.
Moment setrvačnosti je skalární veličina, má stejný význam jako hmotnost tělesa m při posuvném pohybu.

Př. Prázdný vozík o menší hmotnosti roztlačíme a zastavíme snadno. Kdybychom měli na vozíku 1000 kg materiálu, bude obtížné uvést ho do pohybu a naopak. Podobně si můžeme představit situaci při roztáčení a brždění dřevěného a železobetonového válce. Lze předpokládat, že u železobetonového válce stejných rozměrů bude změna pohybu obtížnější.

Budeme uvažovat těleso hmotnosti *m* otáčející se kolem osy, která leží ve vzdálenosti *r* od těžiště. Jestliže nastane takový případ, že rozměry tělesa lze vzhledem ke vzdálenosti *r* zanedbat (hmotný bod), pak moment setrvačnosti bude $J = mr^2$.
Ze zápisu vyplývá, že moment setrvačnosti bude tím větší, čím dále bude hmota od osy otáčení.

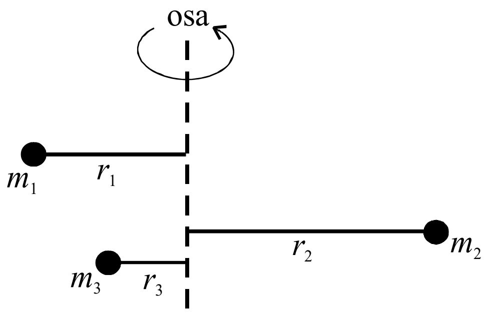


Př. Určete moment setrvačnosti Země, která se pohybuje po kruhové dráze kolem Slunce (jedná se o zjednodušení, skutečná trajektorie Země má tvar elipsy, Slunce je v jednom z jejích ohnisek).
Řešení:
Hmotnost Země je $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, poloměr oběžné dráhy kolem Slunce je $150 \cdot 10^9$ m.
$J = mr^2 = 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 150 \cdot 10^9 = 897 \cdot 10^{33}$ kg·m^2.



Moment setrvačnosti Země je $897 \cdot 10^{33}$ kg·m^2.

V případě většího počtu navzájem izolovaných bodů bude moment setrvačnosti soustavy roven součtu momentů setrvačností jednotlivých bodů.



$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} J_i \ .$$

U pravidelných těles je možné výpočet stanovit relativně snadno. U některých pravidelných objektů hmotnosti m jsou momenty setrvačnosti J_T vzhledem k ose procházející těžištěm uvedeny v tabulkách např.:

a) válec – $J_T = \frac{1}{2} m r^2$, kde r je poloměr válce,

b) koule – $J_T = \frac{2}{5} m r^2$, kde r je poloměr koule,

c) obruč – $J_T = m r^2$, kde r je poloměr obruče,

3.5.3 Gyrační poloměr

V některých případech v praxi je při výpočtech vhodné použít veličinu gyrační poloměr. Gyrační poloměr R je taková vzdálenost od osy otáčení, do které bychom museli umístit všechnu hmotnost m tělesa, aby se moment setrvačnosti nezměnil.

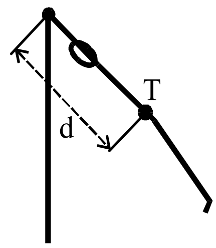
Platí $J = m R^2$, pak $R = \sqrt{\frac{J}{m}}$.

3.5.4 Steinerova věta

Steinerova věta slouží k výpočtům momentů setrvačností těles, která se otáčejí kolem osy neprocházející těžištěm.

$J = J_T + md^2$,

kde J_T je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, m je hmotnost tělesa, d je vzdálenost těžiště od okamžité osy otáčení.



.

Př. Určete pomocí Steinerovy věty moment setrvačnosti valící se koule.

Řešení:

Koule, která se valí, se otáčí kolem okamžité osy. Tato okamžitá osa leží v dotykové přímce s podložkou. Její vzdálenost od těžiště je rovna poloměru $d = r$. Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose procházející těžištěm je $J_T = \frac{2}{5} m r^2$. Pak po dosazení do Steinerovy věty dostaneme

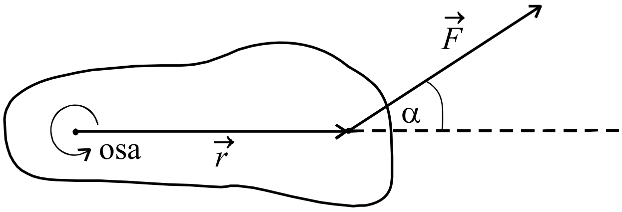
$$J = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{2}{5} m r^2 + \frac{5}{5} m r^2 = \frac{7}{5} m r^2 .$$

Velikost momentu setrvačnosti valící se koule je $\frac{7}{5} mr^2$.

3.5.5 Moment síly

Působením síly na těleso mimo jeho bod otáčení vzniká otáčivý účinek síly. Jeho velikost závisí na velikosti a směru síly, na vzdálenosti síly od osy otáčení (na umístění působiště síly).

Moment síly $\vec{M}$ je mírou otáčivého účinku síly $\vec{F}$ působící na těleso otáčivé kolem pevného bodu.

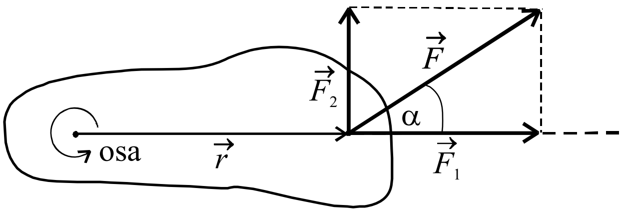


Působiště síly je ve vzdálenosti r od osy otáčení. Tuto vzdálenost nazýváme rameno síly. Rameno síly (průvodič síly) je vektorová veličina $\vec{r}$. Úhel α je úhel, který svírá síla s ramenem síly.

Působící sílu rozložíme na dvě složky o velikostech:

$F_1 = F\cos\alpha$,

$F_2 = F \sin \alpha$.



Z obrázku je zřejmé, že otáčivý účinek má složka $\vec{F}_2$, která je kolmá k rameni síly $\vec{r}$. Je to složka tangenciální. Je tečnou ke kružnici, po které se otáčí koncový bod polohového vektoru. Vektorová přímka složky $\vec{F}_1$ prochází osou otáčení a na otáčení tělesa nemá vliv. Je to složka normálová.

Velikost momentu síly určíme pomocí tangenciální složky pomocí vztahu $M = F_2\, r$.
Po dosazení je $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$.
Jednotka momentu síly: $[M] = \mathrm{N \cdot m}$.

Př. Pro výpočet velikosti momentu síly tedy použijeme součin síly a její vzdálenosti od bodu otáčení. Touto vzdáleností tedy není vzdálenost počátku vektoru síly od bodu otáčení, ale vzdálenost vektoru síly od bodu otáčení. Pro čtenáře, kterým tento postup činí potíže, doporučujeme proložit vektorem síly přímku a z bodu otáčení spustit kolmici na tuto přímku.

Protože r, F jsou velikosti příslušných vektorů, můžeme v souladu s pravidly vektorové algebry $\left(c = a \,.\, b \,.\sin\alpha \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}\right)$ tento vztah zapsat jako vektorový součin vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$.
Pak platí $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment síly při rotačním pohybu má stejný význam jako síla při translačním pohybu. Způsobuje změnu pohybového stavu tělesa.
1. $M = 0$ N·m ⇒ těleso je v klidu nebo rovnoměrném otáčivém pohybu.
2. $M = \text{konst}.$ ⇒ těleso je v rovnoměrně zrychleném (zpomaleném) otáčivém pohybu.
3. $M \neq \text{konst}.$ ⇒ těleso je v nerovnoměrně zrychleném (zpomaleném) otáčivém pohybu.

Na těleso může současně působit více sil s otáčivým účinkem. Výslednice jejich momentů je rovna vektorovému součtu jednotlivých momentů sil.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

Př. Typickými úlohami, ve kterých je pro řešení nutná znalost momentu síly, jsou příklady zabývající se vztahem mezi působením tíhové a svalové síly ve vybraných kloubech lidského těla. Jestliže např. zvedáme břemeno a předpokládáme, že bod otáčení je umístěn v dané meziobratlové ploténce, pak porovnáváme moment tíhové síly břemene a moment tíhové síly horní poloviny těla s momentem svalové síly extenzorů trupu.

3.5.6 Moment hybnosti

Moment hybnosti $\vec{b}$ je vektorová veličina. Charakterizuje pohybový stav tělesa při rotačním pohybu, podobně jako hybnost charakterizuje pohybový stav tělesa při translačním pohybu. Souvisí s momentem setrvačnosti J a úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$, je vyjádřen vztahem

$$\vec{b} = J\vec{\omega}.$$

Jednotka momentu hybnosti: $[b] = \text{kg·m}^2\text{·rad·s}^{-1}$.

Podobně jako u translačního pohybu (zákon zachování hybnosti) můžeme vyslovit pro rotační pohyb zákon zachování momentu hybnosti. Jestliže na těleso otáčivé kolem osy nepůsobí vnější síla (izolovaná soustava), nebo jestliže je výsledný otáčivý moment vnějších sil roven nule, je moment hybnosti co do velikosti i směru konstantní.

Poznámka: Další text je určený pro případné zájemce o hlubší pochopení problematiky.
V uvedených vzorcích si povšimněte, jak lze následující vztahy odvodit pro posuvný a otáčivý pohyb. Vzorce vzniknou „nahrazením odpovídajících si veličin“, síla x moment síly, hmotnost x moment setrvačnosti, zrychlení x úhlové zrychlení.

3.5.7 Pohybová rovnice rotačního pohybu

Pohybová rovnice rotačního pohybu je analogická pohybové rovnici translačního pohybu

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Pro rotační pohyb zapíšeme pohybovou rovnici ve tvaru:

$$\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}.$$

3.5.8 Práce momentu síly

V případě, že tangenciální složka síly $\vec{F}$ (označili jsme $\vec{F}_2$) svým působením na otáčivé těleso změní polohový vektor o hodnotu $\mathrm{d}\vec{r}$, vykoná elementární práci

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_2\ \mathrm{d}\vec{r} = F_2 \cos\alpha\, \mathrm{d}r = F \sin\alpha \cos\alpha\, \mathrm{d}r = F \sin\alpha\, r\, \mathrm{d}\varphi \cos\alpha = M \cos\alpha\, \mathrm{d}\varphi = \vec{M}\ \mathrm{d}\vec{\varphi}\ .$$

Celková práce při rotačním pohybu je vyjádřena skalárním součinem momentu síly $\vec{M}$ a úhlové dráhy (úhlu otočení) $\vec{\varphi}$. Její velikost určíme ze vztahu $W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}$.

Jednotkou práce momentu síly je joule, $[W]$ = J.

Př. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že určíme-li velikost práce jako součin síly a vzdálenosti, potom práci momentu síly vyjádříme součinem momentu síly a velikosti úhlu. Podobně jako v předcházející kapitole tedy veličiny pro pohyb posuvný (síla, dráha) nahradíme veličinami pro pohyb otáčivý (moment síly, úhel).

3.5.9 Výkon momentu síly

Výkon při rotačním pohybu představuje stejně jako při posuvném pohybu časové zhodnocení práce.

Platí $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, tedy po dosazení za práci momentu síly dostáváme $P = \dfrac{\vec{M}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\,\vec{\omega}$. To je analogie výrazu $P = \vec{F}\,\vec{v}$.

Jednotkou výkonu momentu síly je watt, $[P]$ = W.

3.5.10 Kinetická energie rotačního pohybu

Protože moment síly můžeme vyjádřit podle pohybové rovnice v závislosti na změně úhlové rychlosti, pak

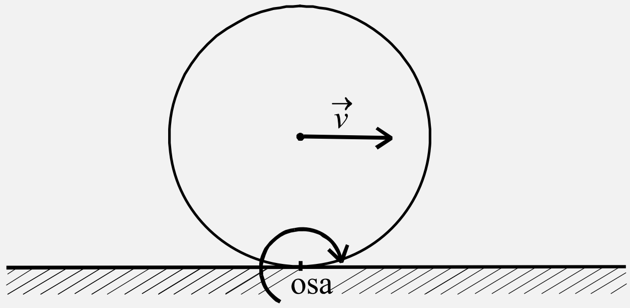
$$W = \int J\,\varepsilon\ \mathrm{d}\varphi = \int J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}\varphi = \int J \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\omega = \int J\,\omega\ \mathrm{d}\omega\ .$$

Po integraci dostaneme

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\,\omega\ \mathrm{d}\omega = \left[\frac{1}{2} J\,\omega^2\right]_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{2} J\,\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\,\omega_1^2\ .$$

Výraz $\frac{1}{2} J\,\omega^2$ představuje kinetickou energii rotačního pohybu. Jednotkou je joule (J).

Př. Určete kinetickou energii valícího se válce o hmotnosti 4 kg a poloměru 0,5 m. Válec se valí rychlostí 2 m.s-1.
Řešení:



Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose procházející těžištěm je $J = \frac{1}{2} m r^2$.

Válec v příkladu se neotáčí kolem osy v těžišti, ale kolem okamžité osy, která leží na styku válce s podložkou. Moment setrvačnosti pak určíme podle Steinerovy věty. Vzdálenost osy otáčení od těžiště je rovna poloměru *r*.

$$J = J_T + md^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2 .$$

Kinetickou energii určíme podle vztahu

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2 .$$

Po dosazení dostaneme

$$E_k = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}75\, J$$

Kinetická energie valícího se válce je 0,75 J.

3.5.11 Porovnání vztahů popisující translační a rotační pohyb

Translační pohyb	*Rotační pohyb*
dráha s	úhlová dráha φ
rychlost $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
hmotnost m	moment setrvačnosti J
síla $F = ma$	moment síly $M = J\varepsilon$
hybnost $p = m v$	moment hybnosti $b = J\omega$
práce $W = \int F \,\mathrm{d}s$	práce $W = \int M \,\mathrm{d}\varphi$
kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} m v^2$	kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
výkon $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$	výkon $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

3.6 Testové otázky

1. *Newtonův zákon síly je vyjádřen jako závislost síly na*
a) hmotnosti a rychlosti
b) hmotnosti a dráze
c) hmotnosti a čase
d) hmotnosti a zrychlení

2. *Síly, které se uplatňují při zákonu akce a reakce*
a) se navzájem ruší
b) po složení tvoří nulový vektor
c) působí na tělesa pouze v místě jejich dotyku
d) se neruší a nelze je skládat

3. *Síla působící na cyklistu ve směru dráhy má konstantní směr a velikost. Pohyb cyklisty je*
a) rovnoměrný přímočarý
b) rovnoměrný křivočarý
c) rovnoměrně zrychlený přímočarý
d) rovnoměrně zpomalený přímočarý

4. *Na míč o hmotnosti m = 0,3 kg působí konstantní síla F = 3 N. Velikost rychlosti míče na konci druhé sekundy je*
a) $10\ m{\cdot}s^{-1}$
b) $15\ m{\cdot}s^{-1}$
c) $20\ m{\cdot}s^{-1}$
d) $25\ m{\cdot}s^{-1}$

5. *Vnitřní síly soustavy*
a) mohou za určitých podmínek ovlivňovat pohyb soustavy jako celku
b) přecházejí na síly vnější při pohybu v bezoporové fázi
c) mění pouze pohybový stav jednotlivých těles soustavy

6. *Tíhová síla*
a) je vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly
b) je shodná s velikostí a směrem gravitační síly ve všech bodech na povrchu Země
c) je shodná s velikostí gravitační síly na rovníku
d) nemění se s polohou tělesa na povrchu Země

7. *Gymnastka o hmotnosti m = 35 kg cvičí na kladině o hmotnosti m_k = 25 kg. Je-li gymnastka ve středu kladiny, jsou síly působící na okrajích v místech upevnění nářadí ($g = 10\ m{\cdot}s^{-2}$)*
a) 250 N
b) 300 N
c) 350 N
d) 600 N

8. *Velikost koeficientu tření mezi lyží a sněhem je μ = 0,07. Velikost třecí síly je T = 14 N. Hodnota síly, kterou působí lyžař kolmo na podložku, je*
a) 120 N
b) 98 N
c) 200 N
d) 140 N

9. *Lyžař zatěžováním lyže*
a) zmenšuje velikost třecí síly mezi lyží a sněhem
b) zvětšuje velikost třecí síly mezi lyží a sněhem
c) neovlivňuje velikost třecí síly mezi lyží a sněhem

10. *Velikost odstředivé síly, která působí na běžce při běhu v zatáčce, není ovlivněna*
a) hmotností běžce
b) poloměrem zatáčky
c) rychlostí pohybu
d) žádná odpověď není správná

11. *Lyžař přejíždí přes terénní vlnu. Na vrcholu této nerovnosti působí na svah silou, která je rovna*
a) velikosti tíhové síly lyžaře
b) rozdílu tíhové síly lyžaře a odstředivé síly, která na něj působí
c) součtu tíhové síly lyžaře a dostředivé síly, která na něj působí
d) součtu tíhové síly a odporu prostředí

12. *Odpor prostředí je síla, která*
a) působí na každé těleso v hmotném prostředí, které je v klidu
b) působí na každé těleso v hmotném prostředí, které se pohybuje pouze rovnoměrným přímočarým pohybem
c) působí na každé těleso v hmotném prostředí, které se pohybuje pouze nerovnoměrným přímočarým pohybem
d) působí na každé těleso v hmotném prostředí, které se pohybuje

13. *Síla odporu prostředí působí*
a) proti směru pohybu
b) kolmo na směr pohybu
c) ve směru pohybu
d) libovolně, v závislosti na podmínkách

14. *Aerodynamická (hydrodynamická) vztlaková síla působí*
a) proti působení tíhové síly
b) kolmo na směr síly, způsobené odporem prostředí
c) ve směru pohybu
d) neplatí žádná z těchto možností

15. *Velikost průřezu lidského těla, která je nezbytná pro určení hodnoty aerodynamické vztlakové síly, se určí v rovině, která je*
a) ve směru pohybu
b) kolmá na směr pohybu
c) rovnoběžná se směrem pohybu
d) nelze obecně určit

16. *Pro balón, který stoupá svisle vzhůru, platí*
a) velikost tíhové síly je větší než vztlaková síla
b) velikost tíhové síly je rovna vztlakové síle
c) velikost tíhové síly je menší než vztlaková síla
d) nelze obecně určit

17. *Parašutista se pohybuje zrychleným pohybem vlivem tíhové síly F_G. Proti pohybu působí celková síla odporu prostředí F_{odp}. V okamžiku, kdy mají obě síly stejnou velikost (vztlakovou sílu zanedbáváme),*
a) začíná pohyb rovnoměrný
b) začíná pohyb zpomalený
c) pohyb se zastaví
d) tato situace nemůže nastat

18. *K pohybu lyžaře směrem po svahu dolů dochází*
a) je-li koeficient tření mezi lyží a sněhem menší než velikost tlakové síly
b) je-li odpor prostředí menší než velikost tíhové síly
c) je-li vektor tíhové síly kolmý ke svahu menší než třecí síla
d) je-li složka tíhové síly rovnoběžná se svahem větší než třecí síla

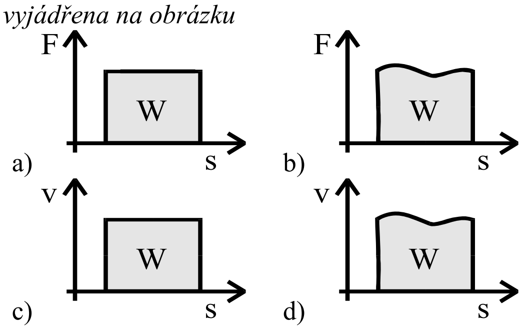
19. *Jednotka hybnosti je*
a) $kg \cdot m \cdot s^2$
b) $kg \cdot m \cdot s$
c) $kg \cdot m \cdot s^{-1}$
d) $kg \cdot m \cdot s^{-2}$

20. *Míč o hmotnosti m se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v. Čas t, za který se míč zastaví, začne-li působit proti směru pohybu konstantní síla F, je*
a) $F \cdot m \cdot v$
b) $F \cdot m/v$
c) $F \cdot v/m$
d) $m \cdot v/F$

21. *Impuls síly předaný tenisovému míči při podání je I = 2 N·s. Míč o hmotnosti m = 0,04 kg se bude pohybovat rychlostí*
a) $20\ m \cdot s^{-1}$
b) $40\ m \cdot s^{-1}$
c) $50\ m \cdot s^{-1}$
d) $80\ m \cdot s^{-1}$

22. *Cyklista o hmotnosti m = 60 kg se při jízdě z kopce pohybuje tak, že se jeho rychlost zvýší z 10 $m \cdot s^{-1}$ na 15 $m \cdot s^{-1}$. Velikost impulsu síly, který je nezbytný pro tuto změnu, je*
a) 900 N·s
b) 600 N·s
c) 300 N·s
d) nelze určit

23. *Velikost práce při proměnné síle je graficky vyjádřena na obrázku*



24. *Jak velkou práci vykoná síla F = 7 N, která působí ve směru osy x na těleso, pohybující se ve stejném směru z počátku do vzdálenosti s = 10 m*
a) 70 J
b) 7 J
c) 10 J
d) 0 J

25. *Výkon tahače při rychlosti v 20 $m \cdot s^{-1}$ a tažné síle F = 6000 N je*
a) 3000 W
b) 12000 W
c) 120000 W
d) 300000 W

26. *Koule o hmotnosti m vržená svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0 má v nejvyšším bodě dráhy*
a) pouze kinetickou energii
b) pouze potenciální energii
c) kinetickou i potenciální energii
d) celkovou energii rovnou nule

27. *Velikost potenciální energie vzhledem k vodní hladině skokana do vody o hmotnosti m = 80 kg, který provádí skok z desetimetrové věže, je (g = 9,81 $m \cdot s^{-2}$)*
a) 8000 J
b) 7848 J
c) 3431 J
d) 980 J

28. *Velikost kinetické práce, která je nutná pro zastavení sprintera o hmotnosti m = 90 kg z běhu o rychlosti $v = 10\ m{\cdot}s^{-1}$, je*
a) 4500 J
b) 9000 J
c) 45000 J
d) 90000 J

29. *Součet kinetické a potenciální tíhové energie v izolované soustavě*
a) je konstantní
b) mění se
c) je roven nule
d) neplatí žádná z těchto možností

30. *Bod, ve kterém tíhová síla působí na letící oštěp, se nazývá*
a) působiště tlaku
b) těžiště oštěpu
c) působiště reakční síly
d) střed oštěpu

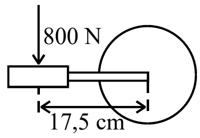
31. *Pro výpočet velikosti momentu setrvačnosti bérce je nutné znát jeho*
a) zrychlení
b) sílu
c) rychlost
d) hmotnost

32. *Považujeme-li lidské tělo za dokonale tuhé těleso, potom jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose* **o** *procházející těžištěm je ve srovnání s momenty setrvačnosti vzhledem k osám rovnoběžným s osou o*
a) nejmenší
b) největší
c) stejný
d) kolísá

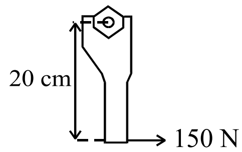
33. *Krasobruslař začíná piruetu s roztaženými horními končetinami. Po jejich přitažení k trupu se*
a) zvětší moment setrvačnosti, zvětší rychlost otáčení
b) zvětší moment setrvačnosti, zmenší rychlost otáčení
c) zmenší moment setrvačnosti, zvětší rychlost otáčení
d) zmenší moment setrvačnosti, zmenší rychlost otáčení

34. *Moment síly určuje*
a) míru stability tělesa proti převržení
b) množství práce vykonané za jednotku času
c) velikost otáčivého účinku síly
d) odpor hmoty proti změně pohybového stavu

35. *Velikost momentu síly, který vzniká při působení síly na pedál kola pro vybranou polohu (horizontála), je*
a) 140 N·m
b) 175 N·m
c) 782,5 N·m
d) 817,5 N·m



36. *Velikost momentu síly, který vzniká při utažení matice, je*
a) 5 N·cm
b) 5 N·m
c) 30 N·cm
d) 30 N·m



37. *Moment dvojice sil vzniká působením dvou sil*
a) stejně velkých, stejně orientovaných
b) stejně velkých, různoběžných
c) stejně velkých, opačně orientovaných
d) stejně velkých, ležících v jedné přímce

38. *Moment dvojice sil způsobuje*
a) pouze otáčení tělesa
b) pouze posun tělesa
c) otáčení a následný posun tělesa
d) nelze určit

39. *Při porovnání veličin pro pohyb posuvný a otáčivý platí následující analogie*
a) dráha → úhel; práce → výkon
b) rychlost → úhlová rychlost; impuls síly → moment hybnosti
c) zrychlení → úhlové zrychlení; síla → moment síly
d) žádný z těchto bodů neplatí

40. *Kinetickou energii rotačního pohybu tělesa, vzhledem k ose procházející těžištěm, určíme ze vztahu*
a) $E_k = 1/2\ mv^2$
b) $E_k = 1/2\ m\omega^2$
c) $E_k = 1/2\ J_0 v^2$
d) $E_k = 1/2\ J_0\omega^2$

Řešení: 1d, 2d, 3c, 4c, 5c, 6a, 7b, 8c, 9b, 10d, 11b, 12d, 13a, 14b, 15b, 16c, 17a, 18d, 19c, 20d, 21c, 22c, 23b, 24a, 25c, 26b, 27b, 28a, 29a, 30b, 31d, 32a, 33c, 34c, 35a, 36d, 37c, 38a, 39c, 40d